

TD 4: variables discrètes

Exercice 1: 3 étudiants doivent passer un entretien d'embauche. Chaque entrevue se traduit soit par l'offre d'une place, soit par le rejet de la candidature. Les issues de l'expérience sont définies par les résultats des trois entretiens.

- a) Enumérer les issues de l'expérience
- b) Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre d'offres faites. De quel type de variable s'agit-il?
- c) Donner la valeur de la variable aléatoire N pour chaque issue de l'expérience.

Exercice 2: Soit X la variable aléatoire qui représente la somme obtenue au cours du lancement de deux dés

- a) Etablir la distribution de probabilité pour X
- b) Construire le graphe de cette distribution

Exercice 3: Les distributions des niveaux de satisfaction sur le plan professionnel de deux échantillons l'un de cadres supérieurs et l'autre de juniors d'une entreprise sont présentés ci-dessous: les niveaux de satisfaction vont de 1 (très insatisfait) et 5 (très satisfait)

PROBABILITE	CADRES SUPERIEURS	CADRES JUNIORS
NIVEAU DE SATISFACTION		
1	0,05	0,04
2	0,09	0,10
3	0,03	0,12
4	0,42	0,46
5	0,41	0,28
Total	1,00	1,00

- a) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs?
- b) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres juniors?
- c) Calculez la variance des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et juniors?
- d) Calculez l'écart type des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et juniors ?
- e) Conclure sur le niveau de satisfaction des cadres

Exercice 4 : Un gardien de nuit doit ouvrir l'une des portes à contrôler pendant sa tournée, dans le noir. Il possède un trousseau de 10 clés d'allures semblables, mais seule une clé peut ouvrir la porte en question. L'essai des clés se fait au hasard. Le gardien dispose de deux méthodes : La méthode A rationnelle : qui consiste à essayer chaque clé, l'une après l'autre, en prenant garde de ne pas utiliser la même clé et la méthode B désordonnée qui consiste à essayer une clé après avoir agité le trousseau, chaque fois que le gardien essaye une clé, celle ci peut avoir ou non été déjà essayée

1) On appelle X_A la variable aléatoire qui désigne le nombre de clés essayées (y compris celle qui donne satisfaction) par la méthode A. Déterminer la loi de probabilité de X_A , son espérance et son écart type.

2) De même, on appelle X_B , la variable aléatoire analogue que l'on obtient par la méthode B. déterminer la loi de probabilité de X_B .

3) Quelle est la probabilité d'essayer plus de 8 clés par chacune des 2 méthodes?

- 4) Le gardien utilise la méthode A lorsqu'il est à jeun et la méthode B lorsqu'il est ivre. Un cambrioleur caché à l'intérieur sait qu'il est ivre 1 jour sur 3. Quelle est la probabilité pour que le gardien soit ivre sachant que les 8 premiers essais ont échoué?

Exercice 5 : Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire au hasard une boule et on observe le numéro qu'elle porte.

- 1) Déterminer l'espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$ et la variable aléatoire réelle X associés à cette épreuve aléatoire.
- 2) Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X ;
- 3) Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r X puis tracer son graphe.
- 4) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$

Exercice 6 : Soit X le nombre de voitures qui passent entre 17h et 18h en point donné de l'autoroute. On a observé que le nombre moyen de voitures est de $E(X)=4000$ et que la variance $V(X)= 100\ 000$. Donner une minoration de la probabilité de l'événement le nombre de voitures est compris entre 3500 et 4500.

Exercice 7 : (Extrait juin 2006) Une urne contient trois boules vertes, deux boules oranges et quatre boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne. Une boule verte fait gagner 2 points, une boule orange fait gagner 1 point et une boule rouge fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de points obtenus

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire réelle X .
- 2) Déterminer la loi de la v.a.r X .
- 3) Déterminer sa fonction de répartition
- 4) Calculer son espérance et sa variance

Exercice 8 : Une urne contient deux boules : une rouge et une bleue. On prélève une boule au hasard dans cette urne. Si on obtient une boule rouge on a gagné : si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique (on en rajoute une). On procède à un nouveau tirage dans l'urne qui contient alors 3 boules : une rouge et 2 bleues. Si on obtient une boule rouge on a gagné : si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique (on en rajoute une), puis on procède à un nouveau tirage et ainsi de suite.

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a.r X
- 2) Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r X
- 3) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$

Exercice 9 : (Extrait sujet février 2000): On jette un dé équilibré. On note X la variable aléatoire représentant le double du nombre obtenu et Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 ou 3 suivant que l'on obtient un numéro impair ou pair.

- 1) calculer X
- 2) Calculer Y
- 3) Calculer $X+Y$
- 4) Calculer XY

Exercice 10: (Extrait sujet de juin 1998): Soit l'univers $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. On suppose les événements élémentaires équiprobables.

On considère d'autre part deux variables aléatoires X et Y sur Ω définies par :

$X(a,b) = a, Y(a,b)=b$ telles que: $P(X = a) = P(Y = b) = \frac{1}{2}, \forall (a,b) \in \Omega$

- 1) Vérifier que X et Y sont indépendants.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de $Z = X+Y$ ainsi que la fonction de répartition de Z .
- 3) Même question pour $T=XY$
- 4) Calculer l'espérance mathématique et la variance de T .