chapitre 3

Fonction de plusieurs variables

Preuve p 35

In≠ité de C.S.

$$(XY)^2 \leq (XX) \times (YY) \quad \forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2$$

Dém : employer la bilinéarité

$(\alpha X + \beta X').Y = \alpha(XY) + \beta(X'Y)$ Forme linéaire

$X.Y = Y.X$ Forme symétrique

X et Y orthogonaux ssi $X.Y = 0$

Preuve inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(X+tY)(X+tY) \geq 0$$

$$XX + X(tY) + tYX + t^2YY \geq 0$$

$$XX + 2tXY + t^2YY \geq 0$$

$t = x$ $\quad (YY)t^2 + 2t(XY) + (X.X) \geq 0$

$$\Delta = (2(X.Y))^2 - 4(YY)(XX)$$

$$= 4[(X.Y)^2 - (YY)(XX)]$$

Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow (XY)^2 \leq (XX)(YY)$

(i) $N(X) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{XX} = 0$

$\Leftrightarrow XX = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \; x_i = 0 \Leftrightarrow X = \vec{0}$

Inégalité de C S

$(XY)^2 \leq X^2 \times Y^2$

$XY \leq \sqrt{X^2Y^2}$

Norme

Preuve (ii) $N(X+Y) = \sqrt{(X+Y)(X+Y)}$

$(X+Y).(X+Y) = XX + 2XY + YY$

Inégalité de C.S. $\leq XX + 2\sqrt{(XX)(YY)} + YY$

$\leq (\sqrt{XX})^2 + 2\sqrt{XX}\sqrt{YY} + (\sqrt{YY})^2$

on reconnait une identité remarquable

$\rightarrow \leq (\sqrt{XX} + \sqrt{YY})^2$

$$\sqrt{(X+Y)(X+Y)} \leq \sqrt{XX} + \sqrt{YY}$$

$$N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$$

Preuve (iii) $N(\lambda X) = \sqrt{(\lambda X)(\lambda X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2}$

$= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^n} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

⚠ $= |\lambda| \, N(X)$

p 36 **Exercice :**

Mq si N norme ~~alors d~~ $(X,Y) = N(X - Y)$ est une distance.

i) $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow N(X-Y) = 0$

$\Leftrightarrow X - Y = \vec{0}$

$\Leftrightarrow X = Y$

(ii) $d(X,Y) = N(X-Y)$

$= N(Y-X) = N(-(X-Y))$

$= |-1| \, N(X-Y) = N(X-Y)$

$= d(X,Y)$

(iii) Soient $(X,Y,Z) \in E^3$

$d(X,Z) = N(X-Z)$

$= N[(X-Y) + (Y-Z)]$

$\leqslant N(X-Y) + N(Y-Z)$

$\leqslant d(X,Y) + d(Y,Z)$

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5} = \sqrt{1^2+2^2}$

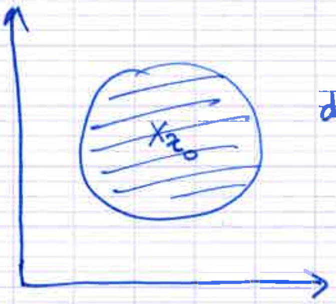
$d\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{2}$

Boule = disque avec norme euclidienne

* B. fermée

Sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}^2$



disque fermé de centre x_0 et de rayon r.

Sur $\mathbb{R}^3$: boule

* ouverte intervalle ouvert centré sur X_0

Sur $\mathbb{R}$ facile

Sur $\mathbb{R}^2$ → sans bord.

Sur $\mathbb{R}^3$ → sans bord (abstrait : pas de réalité physique)

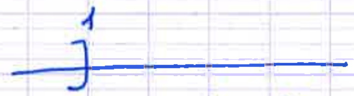
on ne peut pas enlever le bord et s'approcher à l'∞ du bord

boules ouverte : Su

$\mathbb{R}$

$x \in]1;\infty[$

$r = \frac{x-1}{2}$



$B(x,r) \subset]1;+\infty[$.

donc $]1;+\infty[$ est ouvert

$\mathbb{R}^2$

$$\Omega = \{ x>0 \text{ et } y>0 \}$$

On calcule $r = \min \frac{(x,y)}{2}$ $\quad B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, r\right) \subset \Omega$

→ Ω est un ouvert

Un ens est fermé si son compl est un ouvert :

$[a,b]$ est fermé

Car son complément su $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$

ouvert ouvert

p 38

Continuité

- Si fct° du type : $g(x,y) \begin{cases} x^2y & \text{si } y \geq 0 \\ = 2 & \text{sinon} \end{cases}$ définie par morceau

$g(x,0) = 0$

or $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} g(x,y) = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y<0}} 2 = 2$ donc la fct° n'est pas continue si $y = 0$

Supposons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Si $b > 0$ sur un voisinage de (a,b)

$f(a,b) = x^2y$ continue

Si $b < 0$

$f(x,y) = 0$ continue

Prob si $b = 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex p38 *

$$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,0) \\ y \geq 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,0) \\ y \geq 0}} x^2y = a^2 0 = 0$$

$$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,0) \\ y < 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,0) \\ y<0}} 0 = 0$$

f continue en $(a,0)$ donc f continue sur $\mathbb{R}^2$

Dérivées.

1) Posons $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k h^{n-k} - x^n}{h}$$

Formule de Newton : $(x+h)^n = C_n^k x^k h^{n-k}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k \left[\lim_{h\to 0} h^{n-k-1}\right]$$

$\parallel$

0 sauf si $n-k-1=0$
$K = n-1$

$$= C_n^{n-1} x^{n-1} = \boxed{n x^{n-1}}$$

- $\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}^{h} + u(x)v(x+h) + \dots}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}(x+h) + \lim_{x\to 0} u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} u(v(x+h)) - u(v(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \times \frac{v(x+h) -}{h}$$

On pose $H = v(x+h) - v(x)$

Par continuité si $h \to 0$ $H \to 0$

$$\lim_{H\to 0} \frac{u(v(x)+H) - u(v(x))}{H} \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= \boxed{u'(v(x)) \times v'(x)}$$

Comme $(\ln X)' = \frac{1}{X}$

et $[u(v(x))]' = v'(x)\,u'(v(x))$

$$\boxed{[\ln(f(x))]' = f'(x) \times \frac{1}{f(x)}}$$

p39 Dér d'une fct° de n variables

Gradient de $f(x,y)$

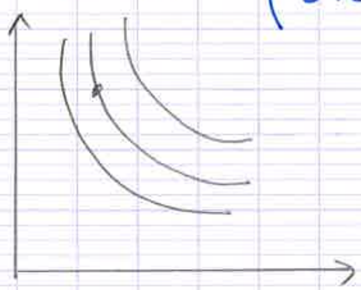
ex $f'_x(x,y) = ye^{xy} + 2x$

$f'_y(x,y) = xe^{xy}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \\ xe^{xy} \end{pmatrix}$$

p40 ex : $f(x,y) = 4x^2y^2 + 3xy^3 + 5x + 4$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy^2 + 3x^3 \\ 8x^2y + 9xy^2 + 5 \end{pmatrix}$$



← $\mathscr{C}$ d'isoutilité $f(x,y) = C$

de niveau $u(x,y) = xy$.

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{3}{4} 4 K^{-1/4} L^{-1/4} = 3K^{1/4} L^{1/4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}(10\,000, 625) = 1,5$$

$$Q(10\,000, 625) = 4(10\,000)^{3/4}\, 625^{1/4} = 20\,000$$

Ex p41

Jacobienne

$$f(x,y) = (x^2+y,\ e^y)$$

$$Jf = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$$

$$g(x,y,z) = (x^2y + e^z,\ xyz,\ 3x+y,\ 2x).$$

dérivée de chaque composante en fct° de x

$$Jf = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & e^z \\ yz & xz & xy \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* Dérivée partielle d'ordre > 1.

ex : $f(x,y) = x^3y^2 + y + 5$

$f'_x = 3x^2y^2$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$

$f'_y = 2x^3y + 1$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = 6x^2y.$$

Matrice hessienne

$$D^2_f = \begin{bmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{bmatrix}$$ la M sera tjs symétrique

p42 Ex :

$$D^2 f = \begin{array}{cccc} d/dx & d/dy & d/dz & \\ \left[\begin{matrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{matrix}\right. & & \left.\right] & \begin{matrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{matrix} \end{array}.$$

p42 Si $f \in C^4$ alors $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial y} = \dfrac{\partial^4 f}{\partial y\, \partial y\, \partial x\, \partial z}$.

* Df (différentielle) mesure la $\Delta°$ d'altitude de f (d'altitude) entre le pt d'arrivée et de départ

p43 Dérivation d'une composée

Exemple : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

① $f(x,y) = x^2 + xy$ le long du chemin défini par $(x,y) = (2t, t^2)$
$g(t)$

$$(f \circ g)'(t) = g_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) + g_2'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))$$

Calcul : $g_1'(t) = 2 \qquad g_2'(t) = 2t$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$(f \circ g)'(t) = 2(4t + t^2) + 2t \times 2t$$
$$= \boxed{8t + 6t^2} \quad \text{ok}$$

Calcul direct : $f(g(t)) = f(2t, t^2) = (2t)^2 + 2t \times t^2$
$$= 4t^2 + 2t^3$$

$$[f(g(t))]' = \boxed{8t + 6t^2} \quad \text{ok}$$

Plus facile pr apprendre la formule

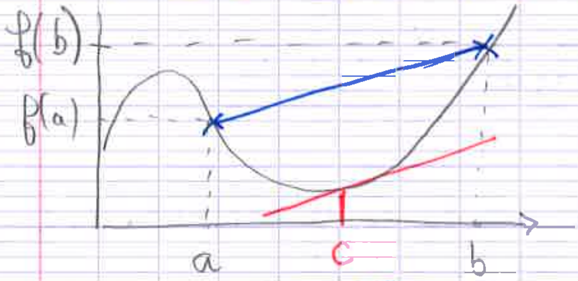
② $\frac{d}{dt}\left[f(2t, t^3, t^2+1)\right] = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^3, t^2+1)$

$+ 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^3, t^2+1)$

$+ 2t \frac{\partial f}{\partial z}(2t, t^3, t^2+1)$

③ $\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(g_1(t), g_2(t)\right] = g_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)] + g_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}}$

p 43 Théorème des accroissements finis.



$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ = coeff directeur de la droite

p 43 ~~Preuve~~ démonstration :

$\psi(t) = f(a + t(b-a))$
vecteur — réel — vecteur

$\psi(0) = f(a)$ $\quad \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\psi(1) = f(b)$ $\quad \psi$ vérifie les conditions d'appli du th.

$\exists\, t \in]0,1[$ tq $\quad \psi(1) - \psi(0) = (1-0)\psi'(t_0)$

$f(b) - f(a) = \psi'(t_0)$

avec $t_0 \in]0,1[$

$\psi(t) = f\left[a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2) + \dots + a_n + t(b_n - a_n)\right]$

$\psi'(t) = (b_1 - a_1) \times \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t(b-a)] + (b_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a + t(b-a)) + \dots + (b_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a + t(b-a)]$

le nom de la ~~Δ~~ ~~able~~ ici n'a aucune incidence c'est juste une position

Donc $\exists\, t_0 \in]0,1[$ $\quad \overbrace{\quad}^{c \in]a,b[}$

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)\, \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(a + t(b-a)\right) = f(b) - f(a)$$

P44

Fonction homogène

Ex : $f(X_1, X_2) = X_1^a . X_2^b$

$f(\lambda X_1, \lambda X_2) = \lambda^a X_1^a . X_2^b \times \lambda^b$

$= \lambda^{a+b} X_1^a X_2^b$

$k = a+b$ $\quad$ f de Cobb-Douglas, homogène de degré $a+b$.

Formule d'Euler

On démontre que (i) implique (ii). (i) $\Rightarrow$ (ii)

$\psi(\lambda) = f(\lambda X_1 - \lambda X_2) - \lambda^k f(X_1 \dots X_n) = 0$

$\psi'(\lambda) = X_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda X_1 \dots \lambda X_n) + \dots + X_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda X_1 - \lambda X_n)$

$- k \lambda^{k-1} f(X_1 \dots X_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X_1 \dots \lambda X_n) - k \lambda^{k-1} f(X_1 \dots X_n)$.

$= 0$ (car je dérive la fonction nulle)

$$\psi'(1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (\underbrace{X_1 - X_n}_{X}) = k f(\underbrace{X_1 \dots X_n}_{X})$$

* Supposons f homogène de degré k

$f(\lambda X_1, \dots \lambda X_n) = \lambda^k f(X_1 \dots X_n)$

En dérivant % à X_i

$\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X_1 \dots \lambda X_n) = \lambda^k \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_1 \dots X_n)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda X_1 \dots \lambda X_n) = \lambda^{k-1} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X_1 \dots X_n)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ homogène de degré $k-1$

Ex : $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda x+\lambda y} = \sqrt{\lambda}\,\sqrt{x+y} = \lambda^{1/2}\sqrt{x+y}$

$k = \frac{1}{2}$

$f'_y = \frac{1}{2}(x+y)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$ → Homo de degré $-\frac{1}{2}$

$f(x,y,z) = \frac{1}{x}\ln\frac{y}{z}$ ⚠ y et z doivent ê de m̂ signe.

Homogène de degré ? -1

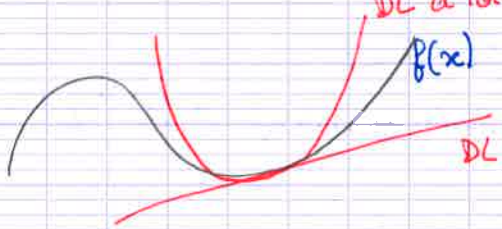
$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \frac{1}{\lambda x}\ln\frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} z} = \lambda^{-1} f(x,y,z)$.

$k = -1$

$f'_z(x,y,z) = -\frac{1}{xz}$ homogène de degré -2.

Développement limité.

*



Sans le reste.

Preuve p45 : Supposons DL à l'ordre n en a

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + o((x-a)^n)$

$g(x) = \sum_{j=0}^{n} g^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!} + o((x-a)^n)$

$(f\times g)(x) = \sum_{k} \sum_{i=0}^{k} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}\, g^{(k-i)}\frac{(x-a)^{k-i}}{(k-i)!} + o((x-a)^n)$

$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}\boxed{\sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(a)\, g^{(k-i)}(a)}$

$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}(fg)^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$

p 46 Exemple :

DL en 1 de e^x

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

DL à l'ordre 2 de $f(x)\ \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$$f(x) = -\ln(x+1)$$
$$f(x) = 0 - (x-0) + \frac{(x-0)^2}{2} + o((x-1)^2)$$
$$= -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ soit X tq $\ln X$ avec $X = \frac{1}{x+1}$

p46 ex : $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ à l'ordre 2 en 0

$$1 + e^x = 1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$X = \frac{1+e^x}{2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

en 1

$$\ln(X) = 1.(X-1) - \frac{(X-1)^2}{2} + o((X-1)^2)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{(x/2 + x^2/4)^2}{2} + o(x^2)$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

En 0

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \boxed{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

DL en a à l'ordre n

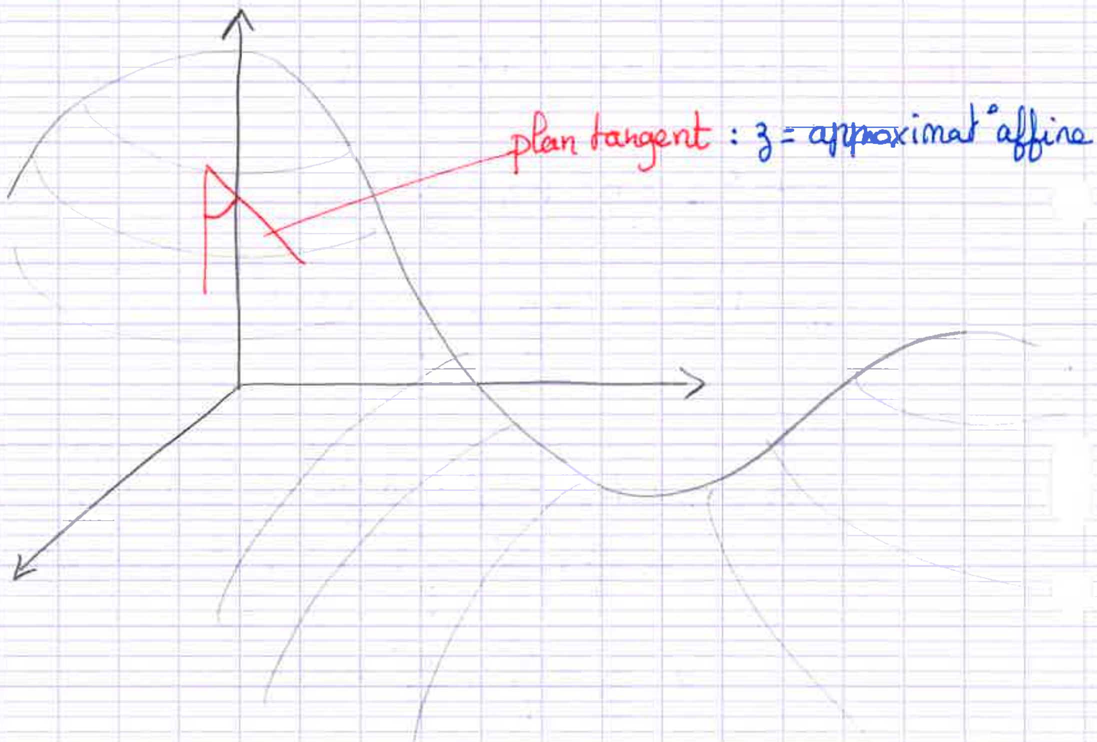
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$$

P47

DL d'une fct° de 2 variables :

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{approximat° affine}}$$
$$+\frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+ o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$$

approximat° quadratique



DL d'une fct° à n variables à l'ordre 2.

ex : à 3 variables :

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$$
$$+ f'_x(x_0,y_0,z_0)\times(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+ f'_z(x_0,y_0,z_0)\times(z-z_0)$$
$$+\frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0)\times(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2$$
$$+\frac{1}{2} f''_{z^2}(x_0,y_0,z_0)\times(z-z_0)^2 + f''_{xy}(x_0,y_0,z_0)\times(x-x_0)(y-y_0)$$

$$+ f''_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + f''_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)$$
$$+ o\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]$$

p 48 Fonctions implicites :

Mq (ii) ⇒ (iii) p48

$F(x, g(x)) = C$ (ii)

On dérive sur un voisinage de (x_0, y_0)

$$\underbrace{1}_{(x)'} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) + \underbrace{g'(x)}_{(y)'} \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) = 0$$

dérivée de $x = 1$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

En x_0 comme $g(x_0) = y_0$

$$g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \quad (iii)$$

p 49 ex : $f(x,y,z) = z^3 + 3xz + 2x^3 + xy^2 + y^3$

$f(x,y,z) = 0$

Vérifions que $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

$$f(1,2,-2) = -8 - 6 + 2\times1^3 + 1\times2^2 + 2^3 = 0$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \in$ bien à $\mathcal{C}$. car $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} / f(x,y,z) = 0 \right\}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + 3x \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-2) = 12+3 = 15 \neq 0$$

D'après le théorème, $\exists\, g$ tq au voisinage de $(1,2,-2)$ on ait $z = g(x,y)$ pour les pts de $\mathcal{C}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3z + 6x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-2) = 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-2) = 16$$

$$g'_x(1,2) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-2)} = \frac{-4}{15}$$

$$g'_y(1,2) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-2)} = \frac{-16}{15}$$

$g(x_0,y_0) + g'_x(x-x_0)$

A l'ordre 1 $\quad g(x,y) = g(1,2) + g'_x\,(x-1) + g'_y\,(y-2)$

$(x-x_0)\quad (y-y_0)$

$+\,o(x-1) + o(y-2)$

$$\boxed{z = -2 - \frac{4}{15}(x-1) - \frac{16}{15}(y-2) + o(x-1) + o(y-2)}$$

On vient de résoudre l'équation <u>localement</u>.

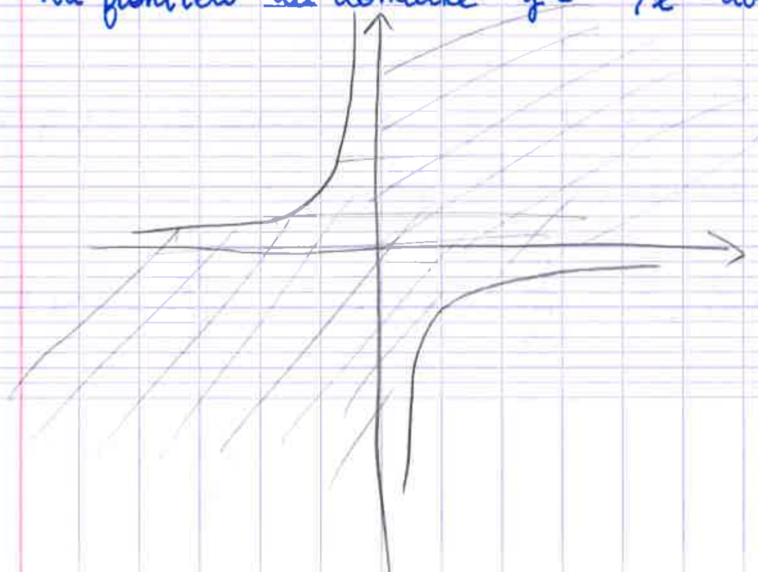
p49 **Exercice**

Soit $f(x,y) = \ln(1+xy)$

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_f \Leftrightarrow 1+xy > 0$

$D_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / xy > -1 \right\}$

La frontière du domaine $y = -1/x$ avec $x \neq 0$



D_f = /// les pts entre les 2 $\mathcal{C}$.

2) f est $\mathcal{C}^\infty$ comme ln (polynome) sur l'intérieur de D_f donc sur D_f

3) $f(x,y) = \ln(1+xy)$

$f'_x(x,y) = \frac{y}{1+xy} = y(1+xy)^{-1}$ $\quad f'_y(x,y) = \frac{x}{1+xy} = x(1+xy)^{-1}$

4) $f''_{x^2} = -y^2(1+xy)^{-2}$

$f''_{y^2} = -x^2(1+xy)^{-2}$

$f''_{xy} = f''_{yx} = (1+xy)^{-1} - yx(1+xy)^{-2}$ (Schwartz)

5) $f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}f''_{x^2}(0,0)x^2 + \frac{1}{2}f''_{y^2}(0,0)y^2$

$+ f''_{xy}(0,0)xy + o(x^2+y^2)$

$f(x,y) = 0 + 0x + 0y + \frac{1}{2}0x^2 + \frac{1}{2}0y^2$

$+ 1 \times xy + o(x^2+y^2)$

$f(x,y) = xy + o(x^2+y^2)$

6) $\hat{f}_{(0,0)}(x,y) = 0$

7) $\hat{f}_{(0,0)}(x,y) = xy$ $\quad (0,1\,;\,0,1)$ est proche de $(0,0)$

$f(0,1\,;\,0,1) \simeq \hat{\hat{f}}_{(0,0)}(0,1\,;\,0,1)$

$\simeq 0,1 \times 0,1 = 0,01$

$\ln(1,01) \simeq 0,01$