

Chapitre 1 : Dénombrement ou analyse combinatoire

Introduction au dénombrement par un exemple rapide :

Le dénombrement est un décompte organisé de tous les résultats possibles d'une expérience. Plusieurs cas pratiques interviennent dans le dénombrement, on se basera sur un exemple concret, celui d'un code de déverrouillage d'un téléphone.

Le système de déverrouillage d'un téléphone est basé sur un code à 3 chiffres, les seuls chiffres autorisés étant le 1, 2 et 3. (ce n'est pas un cas réel, on se borne volontairement pour la simplicité des calculs, le fonctionnement reste le même avec 4 chiffres parmi les 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9).

1. 1er type de verrouillage : on ne peut utiliser ces chiffres qu'une seule fois et on peut les donner dans le désordre (si 123 ouvre l'accès alors 231 également)
2. 2ième type de verrouillage : Idem que 1. mais on peut utiliser plusieurs fois le même chiffre, par exemple le code 223 ou encore 333...
3. 3ième type de verrouillage : on ne peut utiliser qu'une seule fois les chiffres disponibles par contre l'ordre dans lequel on les donne compte pour le déverrouillage (si 123 ouvre alors 231 n'ouvre pas)
4. 4ième type de verrouillage : l'ordre compte et les chiffres peuvent être réutilisés autant de fois que l'on souhaite (si 133 ouvre alors 331 n'ouvre pas)

La valeur d'un tel verrou est proportionnelle au temps passé pour le déverrouiller sans en connaître la combinaison qui lui même est lié au nombre de combinaisons possibles. Le nombre de combinaisons possibles nous est utile, nous allons le calculer pour cet exemple simple, en fonction des cas :

1. un seul code possible : 123
2. 10 codes possibles : le 111, 123, 122, 133, 112, 113, 222, 233, 223, 333.
3. 6 codes possibles : le 123, 132, 231, 213, 312, 321
4. 27 codes possibles : le 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333, 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, et 233

Ce que nous retenons de cette expérience, d'un point de vu concret, est qu'il faudra par exemple 4,5 fois plus de temps, pour ouvrir, sans en connaître le code, le verrouillage de la solution 4. que celui de la solution 3. .

Pour le dénombrement des différents cas de cet exemple nous avons procédé par énumération de tous les cas possibles que nous avons comptés. L'exemple était très simple, cette énumération peut devenir fastidieuse voire impossible selon les cas. L'objet de ce chapitre est de nous ramener à des techniques de combinatoires nous permettant selon le mode de verrouillage d'en déduire le nombre de combinaisons possibles et donc le temps nécessaire à l'ouverture. Parallèle avec le loto sportif, le cas 4) correspond à une grille de 3 match....

Notions que nous aborderons au long de ce chapitre :

1. sans ordre sans répétition : C_3^3
2. sans ordre avec répétition : $\Gamma_3^3 = C_5^3$
3. avec ordre sans répétition : A_3^3
4. avec ordre et répétition : 3^3

I/Ensembles finis, notion de cardinal :

Définition 1 : Soit E un ensemble.

On dit que E est fini si il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $f : [1...n] \rightarrow E$

Remarque : Cet entier n est unique et amène :

Définition 2 :

On appelle cardinal de E (noté $Card(E)$ ou encore $|E|$) l'entier naturel n précédemment cité.
Le cardinal de l'ensemble vide sera égal à 0.

Proposition 1 : Soient E et F deux ensembles finis.

Alors il existe une bijection entre E et F si et seulement si $Card(E) = Card(F)$

→ La démonstration se fera en cours.

Remarque : Cette proposition nous donne une nouvelle méthode pour calculer le cardinal d'un ensemble E.

Il suffit de trouver une bijection entre E et un ensemble F dont on connaît le cardinal.

Par exemple, je suis chef d'orchestre et ne sais pas combien de musiciens j'ai à ma disposition pour une soirée de gala mais en allant dans la soute du bus qui les convoie avant leur arrivée j'ai compté 23 instruments (cardinal de F). Comme je sais qu'un instrument et un seul est attribué à chaque musicien (bijection), je sais combien de musiciens seront présents dans l'orchestre ce soir (cardinal de E).

Propriétés du cardinal :

- Si A fini et $B \subset A$ alors B est fini et $\text{Card}(B) \leq \text{Card}(A)$
De plus, avec cette condition d'inclusion, $A=B$ si et seulement si $\text{Card}A = \text{Card}B$.
- Si A et B sont deux ensembles finis et $A \cap B = \emptyset$ alors
 $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$
- Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cup B$ est fini et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$
- Si E notre ensemble de référence est fini et $A \subset E$ alors $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

Démonstration :

→ Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, comme $B \subset A$, tous les éléments de B sont des éléments de A , ainsi il existe $i_1, \dots, i_p$, $p \leq n$ tels que et $B = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$
alors l'application $[1 \dots p] \rightarrow B$ qui a $j \rightarrow x_{i_j}$ est une bijection de $[1 \dots p]$ dans B ainsi
 $\text{Card}(B) = p$ et $p \leq n$.
 $p = n$ si et seulement si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ soit $B = A$

→ Soit $n = \text{Card}(A)$ et $m = \text{Card}(B)$ alors d'après ce qui précède, il existe deux bijections, de
 $[1 \dots n] \rightarrow A$ et de $[1 \dots m] \rightarrow B$ De plus il existe g bijective de $[n+1 \dots n+m] \rightarrow [1 \dots m]$ (leur
cardinaux sont égaux), indexons donc les éléments de A et B : $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ et
 $B = \{x_{(n+1)}, \dots, x_{(n+m)}\}$ comme $A \cap B = \emptyset$, pour tous i et j dans $[1 \dots m+n]$, $i \neq j$ implique
 $x_i \neq x_j$ ainsi $A \cup B = \{x_1, \dots, x_{(n+m)}\}$ et on a une bijection naturelle entre $[1 \dots m+n]$ et $A \cup B$
en posant $h(i) = x_i$ ainsi $\text{Card}(A \cup B) = n+m = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

→ On suppose maintenant $A \cap B \neq \emptyset$
on introduit $D = C_A(A \cap B)$, le complémentaire de $A \cap B$ dans A , D et B vérifient les conditions
de ii, on applique donc ii à D et B : $\text{Card}(D \cup B) = \text{Card}(D) + \text{Card}(B)$ * or
 $D \cup B = A \cup B$ ainsi il nous reste à déterminer $\text{Card}D$ pour arriver à ce que l'on veut. On
remarque que par construction de D , $A = D \cup (A \cap B)$ et D et $A \cap B$ sont disjoints ainsi on
peut à nouveau appliquer ii qui nous donne $\text{Card}(A) = \text{Card}(D) + \text{Card}(A \cap B)$ d'où
 $\text{Card}(D) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ en remplaçant dans * on a bien ce que l'on souhaite montrer.

→ A et $\bar{A}$ sont disjoints ainsi on peut appliquer ii et $\text{Card}(A \cup \bar{A}) = \text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A})$
d'où l'égalité recherchée

Formule du Crible ou Formule de Poincaré :

Si $A_1, \dots, A_n$ sont n ensembles finis alors $A_1 \cup \dots \cup A_n$ est fini

et

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

ou de manière plus intuitive :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)} \sum_{I \subset [1, \dots, n] \text{ et } \text{Card}(I)=k} \text{Card}\left(\bigcap_{I} A_I\right)$$

Exemple avec $n=3$:

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (-1)^0 (\text{Card}A_1 + \text{Card}A_2 + \text{Card}A_3) + (-1)^1 (\text{Card}(A_1 \cap A_2) +$$

$$\text{Card}(A_1 \cap A_3) + \text{Card}(A_2 \cap A_3) + (-1)^2 \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= \text{Card}A_1 + \text{Card}A_2 + \text{Card}A_3 - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \text{Card}(A_1 \cap A_3) - \text{Card}(A_2 \cap A_3) \\ + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

→ La démonstration sera faite en cours par récurrence sur n .

II Modèles fondamentaux du dénombrement

II – 1 : Arrangements sans répétition et permutations

1/Arrangements sans répétition

Définition 3 : Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini à n éléments. On appelle arrangement sans répétition d'ordre p d'éléments de E le choix successif de p éléments de E deux à deux distincts $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ avec pour tous j, k dans $[1 \dots p]$, $i_j \in [1 \dots n]$ et $i_j \neq i_k$

Dans cette définition le « *successif* » nous indique que l'ordre dans lequel on les choisit compte, le « *deux à deux distincts* » nous indique qu'il n'y a pas de remise.

Notation : on appelle également cet arrangement p-liste sans répétition.

Proposition 2 : Avec les notations précédentes il y a $n(n-1) \dots (n-p+1)$ p-listes sans répétition de E

→ On s'intéresse au nombre de p-uplets différents possibles $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$.

Nous avons n façons de choisir x_{i_1} , $n-1$ de choisir x_{i_2} (x_{i_2} doit être différent de x_{i_1}) et ainsi jusqu'à que l'on peut choisir parmi les $n-p+1$ indices restants vacants.

Notation : On note cet entier A_n^p qui se lit A de p parmi n et on peut écrire $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple : A l'issue des prolongations d'un match de foot le score est toujours nul. L'entraîneur doit donner le nom de 5 tireurs pour la séance de tirs au but et leur ordre de passage. L'équipe comporte 11 joueurs. Combien de possibilités a l'entraîneur de remplir la liste à fournir ?

Solution : On cherche à savoir combien de 5-listes sans répétition (un joueur ne peut tirer deux fois) avec ordre (il faut déterminer leur ordre de passage) d'un ensemble à 11 éléments (le nombre de joueurs de l'équipe) sont possibles.

Ce nombre est donné par $A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 55440$ listes possibles.

D'un point de vue analytique, un arrangement sans répétition de p éléments de E définit une injection de $[1 \dots p]$ dans E de la manière suivante: $f : [1 \dots p] \rightarrow E$ qui a $k \rightarrow x_{i_k}$ avec les notations précédentes.

Il n'y a pas de remise ce qui nous donne le caractère injectif (soit k, k' dans $[1 \dots p]$ tels que $f(k) = f(k')$ alors $x_{i_k} = x_{i_{k'}}$ implique $k = k'$ (sans remise)). Cela amène la définition suivante :

Définition 4 : Soit E un ensemble fini à n éléments .

On appelle arrangement sans répétition d'ordre p de E toute injection de $[1...p]$ dans E et A_n^p est le nombre d'injections de $[1..p]$ dans E .

Remarques :

- 1) L'arrangement tient compte de l'ordre dans lequel on choisit nos éléments, il attribue à chaque élément choisi une place, on choisit d'abord le premier puis le deuxième jusqu'au p ème...
- 2) Si $p > n$, $A_n^p = 0$

2) Cas particulier de l'arrangement : la permutation.

Supposons maintenant que $p=n$, avec les notations précédentes, un arrangement d'ordre n est appelé permutation et on a $n!$ permutations possibles de E , $A_n^n = n!$

En rapport avec la remarque précédente, la permutation réordre ou réindexe les éléments de notre ensemble E .

Ainsi si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ la permutation va attribuer à chaque x_i une nouvelle place pour constituer le nouveau n -uplet $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$ avec pour tous i, k dans $[1..n]$, $i \neq k$ implique $x_{j_i} \neq x_{j_k}$

On a pu remarquer précédemment que les arrangements d'ordre p étaient des injections de $[1..p]$ dans E , on va voir que les permutations sont des bijections de $[1..n]$ dans E .

Pour ce faire, introduisons le lemme ci dessous :

Lemme : Soit E un ensemble fini alors on a équivalence entre :

- 1) $f : E \rightarrow E$ est injective
- 2) $f : E \rightarrow E$ est surjective
- 3) $f : E \rightarrow E$ est bijective

→ On suppose 1) montrons 2) :

Soit $y \in E$, on cherche $x \in E$ tel que $f(x)=y$.

On suppose qu'un tel x n'existe pas.

Comme f est injective, $\text{Card}(\text{Im}f)=n$ (2 éléments de E ne peuvent avoir la même image) or d'après notre supposition, $\text{Card}(\text{Im}f) \leq n-1$ ce qui amène la contradiction ainsi f est surjective.

← on suppose maintenant 2), montrons 1) :

on suppose f non injective ainsi il existe x_1, x_2 différents dans E tels que $f(x_1)=f(x_2)$, soit

$\text{Card}(\text{Im}f) \leq n-1$ or f surjective ainsi $\text{Card}(\text{Im}f)=\text{Card}E=n$ d'où la contradiction ainsi f est injective.

De ce lemme découle la définition suivante :

Comme on a pu voir qu'un arrangement d'ordre p de n était une injection, l'arrangement d'ordre n de n est une bijection :

Définition 5 :

On appelle permutation de E toute bijection de E dans E .

Lorsque $\text{Card}E = n$ on a $n!$ permutations de E (A_n^n)

Exemple : Combien peut on former de mots avec les lettres du mot L.I.V.R.E ?

Solution : On a un groupe de lettres d'ordre 5 : $\{L;I;V;R;E\}$ toutes distinctes.

Le nombre de mots possibles correspond au nombre de permutations d'un ensemble à 5 éléments soit $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ mots différents possibles (ils n'auront évidemment pas tous un sens).

II -2 :Arrangements avec répétitions :

La répétition permet d'utiliser lors de notre tirage un élément de E autant de fois que l'on le souhaite.

Notre p -uplet choisi aura la forme $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ avec i_j non nécessairement différent de i_k pour i_j et i_k dans $[1 \dots n]$, contrairement aux arrangements sans répétition. On remarque également que contrairement à ce qui précède, le calcul a un sens même si $p > n$.

Définition 6 : On appelle arrangement avec répétition d'ordre p d'éléments de E tout p -uplet $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ d'éléments de E , on dira aussi p -listes avec répétition d'éléments de E .

Remarque : Les $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ d'éléments de E , on dira aussi p -listes avec répétition d'éléments de E ne sont pas nécessairement distincts, ce peut être le même élément de E répété d'où l'importance des $()$ et non $\{\}$

Proposition 3 : Soit E fini de cardinal n . Il y a n^p arrangements d'ordre p de E .

$\rightarrow$ n choix pour i_1 , n pour i_2 (remise autorisée)... n pour i_p ainsi n^p manières de former le p -uplet.

D'un point de vu analytique, on peut prolonger le parallèle précédemment effectué en posant :

$$f: [1 \dots p] \rightarrow E \\ j \rightarrow x_{i_j}$$

Définition 7 :

Les arrangements avec répétitions d'ordre p de E sont donc les applications de $[1...p]$ dans E .

Ainsi il y a n^p applications de $[1...p]$ dans E .

Application : Soit E un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$, on cherche à dénombrer l'ensemble des parties de E possibles noté $\mathcal{P}(E)$ et qu'on sera amené à voir de nombreuses fois le long de ce cours. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, une partie de E .

On définit le n -uplet associé à $A = \{(k_1, \dots, k_n)\}$ de la manière suivante : pour tout i dans $[1...n]$, $k_i = 1$ si $x_i \in A$ $k_i = 0$ sinon. La partie A de E est ainsi définie de manière unique et réciproquement un n -uplet donné définit une unique partie de A , on a ainsi établi une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dans l'ensemble des n -uplets de la forme $(k_1, \dots, k_n)$ où $k_i = 0$ ou 1 .

D'après la proposition 1, on a donc $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(B = \{k_1, \dots, k_n\} / k_i = 0 \text{ ou } 1)$

Considérons l'ensemble $\{0, 1\}$. B est l'ensemble des arrangements avec répétitions d'ordre n de l'ensemble $\{0, 1\}$, la proposition 3 nous donne donc que $\text{Card}(B) = 2^n$ ainsi $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

II – 3 : Combinaisons sans répétition :1 Définition du coefficient binomial

Contrairement à l'arrangement, la combinaison sans répétition ne choisit pas successivement des éléments de E mais prélève une partie de E quel que soit l'ordre d'apparition des éléments choisis. Soit la définition suivante :

Définition 8 :

On appelle combinaison sans répétition d'ordre p d'éléments de E toute partie à p éléments de E .

Notation : on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le cardinal de l'ensemble des combinaisons sans répétition d'ordre p de E , il est appelé coefficient binomial.

Proposition 4 :
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

→ Ce qui diffère entre l'arrangement et la combinaison c'est le fait que la combinaison est invariante par permutation de ces p éléments.

Or comme on l'a vu précédemment, dans un ensemble à p -éléments il y a $p!$ permutations possibles

ainsi $A_n^p = C_n^p \times p!$ soit
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Remarque : Lorsque $p > n$, $C_n^p = 0$, il n'y a aucune partie de E qui comporte plus d'éléments que E lui-même.

2 Propriétés des coefficients binômiaux.

Il est important de maîtriser les différentes propriétés ci-dessous :

Proposition 5 :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, C_n^0 = C_n^n = 1$
- 2) $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n, C_n^k = C_n^{n-k}$
- 3) $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq k \leq n, C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (triangle de Pascal)

Démonstration :

→ 1) $C_n^0 = 1$ car un ensemble à n éléments a une seule sous partie à 0 élément, l'ensemble vide
 $C_n^n = 1$ car il n'y a qu'une seule partie à n éléments d'un ensemble à n éléments, c'est lui même.

$$2) C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

Cela revient à dire qu'il y a autant de partie à k éléments d'un ensemble E à n que de parties à $n-k$ éléments. Cela s'explique par le passage au complémentaire pour chaque partie choisie de E à n éléments, on peut associer son complémentaire, une partie à $n-k$ éléments, une bijection se crée entre les parties A et leur complémentaire (chaque partie A à k élément de E désigne de manière unique une partie $\bar{A}$ de E à $n-k$ éléments).

$$3) C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$\frac{k(n-1)! + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Formule du binôme de Newton :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \times a^k \times b^{(n-k)}$$

→ la démonstration sera faite en cours par récurrence sur n en se servant du triangle de Pascal.

Exemple de combinaison sans répétition :

Soit un jeu de 32 cartes. On veut connaître le nombre de manières d'avoir une main de 8 cartes uniquement avec des figures (Valet Dame Roi) et une sans aucune figure.

Solution : Il y a $4 \times 3 = 12$ figures dans le jeu.

On cherche donc à connaître le nombre de manières de choisir 8 cartes parmi 12 soit C_{12}^8 possibilités.

Ce qui donne : $C_{12}^8 = \frac{12!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 11 \times 5 \times 9 = 495$ mains différentes avec uniquement des figures.

Le jeu comporte 20 cartes sans figure, on recommence avec C_{20}^8

III-4 : Combinaisons avec répétitions :

Exemple : 3 dés indiscernables (l'ordre n'importe pas) sont jetés.

On s'intéresse aux résultats possibles.

Le tirage d'un dé peut être illustré par l'ensemble $\{1..6\}$.

On cherche à connaître le nombre de configurations possibles, c'est la même expérience que si l'on tirait avec remise dans une urne trois fois de suite un numéro entre 1 et 6 sans que l'on accorde d'importance à l'ordre dans lequel ces numéros apparaissent.

Définition 9 : On appelle combinaison avec répétition d'ordre p d'éléments de E tout n-uplets d'entiers $(k_1, \dots, k_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n k_i = p$, avec pour tout i dans $[1..n]$, k_i désignant le nombre d'apparition de l'élément x_i durant le tirage.

Solution : Dans notre exemple, $\sum_{i=1}^6 k_i = 3$

On cherche le nombre de combinaisons avec répétitions d'ordre 3 de $[1..6]$

Proposition 7 : Il y a C_{n+p-1}^p combinaisons d'ordre p de E. C_{n+p-1}^p est noté Γ_n^p

→ La démonstration par double dénombrement sera faite durant le cours

Dans notre exemple, $\Gamma_6^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$

III Tableau récapitulatif des dénombrements types pour p éléments pris parmi n :

Avec ordre et sans répétition	Avec ordre et avec répétitions	Sans ordre et sans répétition	Sans ordre et avec répétitions
A_n^p	n^p	C_n^p	Γ_n^p
Réorganiser les lettres du mot LIVRE	Nombre de N° de téléphone commençant par 06	Nombre de mains particulières dans un jeu de carte	Combien de résultats possibles pour le tirage de 3 dés indiscernables