

UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE
UFR de GESTION
Examen de Mathématiques - LICENCE 2ème année
JUN 2022, Durée : 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice, ni téléphone portable, ni lecteur mp3. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Optimisation (6 points)

On cherche à optimiser la fonction $\Psi(x, y) = \sqrt{y^2 + 1} - xy + x^2$

- a) Déterminez les points candidats à l'optimum.
- b) Déterminez la nature de tous les points candidats.
- c) La fonction admet-elle un maximum global? (justifiez)
- d) La fonction admet-elle un minimum global? (justifiez)

II Forme quadratique (7 points)

Soit $Q(x, y, z) = (x - y)(x + z) + (y - 2z)(x + z) - y(2z - y)$

- a) Justifiez que Q est une forme quadratique.
- b) Déterminez sa matrice associée A .
- c) Trouvez une décomposition canonique de Q en utilisant Gauss.
- d) Donnez la signature et la nature de cette forme quadratique.
- e) Calculez le déterminant de A . Le signe trouvé vous paraît-il cohérent? (justifiez soigneusement).
- f) A partir de la décomposition de Gauss, trouvez des sous-espaces les plus grands possibles F_+ et F_- tels que :
 - Q soit définie positive sur F_+ .
 - Q soit définie négative sur F_- .

Décrivez la représentation graphique de F_+ et F_- et donnez leurs dimensions.

III Approximation (5 points)

On considère la fonction à valeurs réelles suivante : $f(x, y) = xy - e^{xy} + x^2 + 1$

- a) Rappelez la formule d'un DL à l'ordre 2 de $f(x, y)$ en un point (a, b) .
- b) Déterminez toutes les dérivées premières et secondes de f .
- c) Déterminez un développement limité de f en $(1, 0)$.
- d) Déduisez en une valeur approchée de f en $(1.1, -0.1)$.
- e) Donnez l'équation du plan tangent en $(-2, 0)$.

IV Question de cours (2 points)

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- a) Donnez la définition de l'image d'une application linéaire u .
- b) Démontrez que l'image de u est un sous espace vectoriel d'un espace à préciser.