

Chapitre 4

Variables aléatoires discrètes

4.1 Généralités sur les variables aléatoires

4.1.1 Exemples

On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite. On gagne 3 euros à chaque résultat pile et on perd 2 euros à chaque résultat face. Un événement élémentaire de cette expérience est une suite ordonnée de 3 symboles parmi P et F, l'univers des possibles peut s'écrire : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPF, FPP, FFP, FFF\}$.

Dans cette expérience et contrairement à ce qu'on a vu précédemment, on ne s'intéresse pas aux événements possibles de Ω et à leur probabilité (probabilité d'obtenir au moins 2F,...) mais à la notion de gain qui en résulte. La notion de gain est, dans cet exemple, bien compréhensible, on s'intéresse à la probabilité de gagner (ou perdre) en associant à chaque événement une valeur numéraire correspondant à la somme que l'on gagne (ou perd).

Par exemple 9 sera associé à l'événement "PPP" alors que -6 sera associé à l'événement "FFF" correspondant aux euros gagnés ou perdus. Les gains possibles sont :

-6 (FFF)

-1 (FFP, FPF, PFF)

4 (PPF, PFP, FPP)

9 (PPP)

Chaque événement élémentaire est à l'origine d'un gain, $X(\omega)$ qui appartient à l'ensemble $\{-6, -1, 4, 9\}$. Il s'ensuit alors naturellement l'application :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \in \{-6, -1, 4, 9\} \end{aligned}$$

On appelle cette application variable aléatoire (variable car ses valeurs diffèrent suivant les possibles et aléatoire car la venue du possible dépend du hasard). La loi de probabilité de X découle directement de la probabilité définie sur Ω (en associant à chaque gain l'événement correspondant, dans notre exemple la probabilité que $X=4$ est égale à la probabilité sur Ω de l'événement "obtenir exactement 2 piles suite à notre expérience aléatoire").

Dans notre cas où le nombre de gains possibles est fini, on peut donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau, le tableau de distribution de la variable aléatoire X :

x_i	-6	-1	4	9
$p_{x_i} = p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On peut aisément vérifier que $\sum_{i=1}^4 p(X = x_i) = 1$

L'introduction de telles variables aléatoires aura un intérêt par la suite car il sera possible de formaliser des calculs grâce aux opérations usuelles sur les réels que l'on n'aurait pu faire avec des événements comme décrits précédemment. Un réel décrivant un événement.

Autre exemple d'application de la notion de variable aléatoire :

soit une urne U dans laquelle se trouvent a boules noires et b boules blanches. on effectue n tirage avec remise.

On s'intéresse à l'événement A_k : "on obtient k boules blanches au cours de n premiers tirages".

Soit X_j la variable aléatoire qui associe à un élément de Ω le réel 1 si la jème boule tirée est blanche, 0 si elle est noire.

On rappelle que Ω est formé de tous les n-uplets ordonnés de type (NBN, .. , BNB) où N représente le tirage d'un boule noire, B le tirage d'un boule blanche. On rappelle que $\text{Card } \Omega = 2^n$ et que sur Ω on a équiprobabilité.

Ainsi,

$$\forall \omega \in \Omega, X_j(\omega) = 1 \text{ si la } j\text{ème boule du n-uplet est blanche} \\ 0 \text{ si elle est noire}$$

ainsi, soit $\omega \in \Omega$, $\sum_{j=1}^n X_j(\omega) =$ nombre de boules blanches tirées lors de l'événement élémentaire ω

En formalisant sans variable aléatoire, on aurait écrit soit B l'événement " on obtient au plus q boules blanches au cours des n premiers tirages", on aurait $B = \cup_{k=0}^q A_k$.

Avec l'introduction de notre variable aléatoire X_j , on peut écrire $B = \{\omega \in \Omega, \sum_{j=1}^n X_j(\omega) \leq q\}$.

Si l'intérêt n'apparaît pas ici immédiatement, en revanche supposons que le joueur réalisant ces tirages gagne une somme égale à la somme des rangs d'apparition des boules blanches et que la question est d'évaluer le gain du joueur. Cette

question n'est plus susceptible d'un traitement en terme d'événements.

A contrario, grâce à la variable aléatoire introduite ci-dessus, on remarque que $\forall \omega \in \Omega$, $\sum_{j=1}^n j * X_j(\omega)$ est le gain du joueur pour le tirage ω et ainsi le nombre de cas favorables pour le joueur souhaitant gagner au moins m euros à l'issue de ce jeu est le cardinal de l'ensemble : $\{\omega \in \Omega / \sum_{j=1}^n j * X_j(\omega) \geq m\}$. Pour cette composition, on gagne en simplicité en étant passé par une v.a. c'est l'intérêt de cette notion.

4.1.2 Définitions

Soit $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un espace probabilisé. Une application X :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

est appelée variable aléatoire sur Ω .

Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire ($\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \wp(\Omega)$) on peut alors calculer $p(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\})$ lorsque X est une variable aléatoire.

Cette probabilité sera notée par la suite par abus de langage $p(X \leq x)$ de même, l'événement $X^{-1}(\{x\})$ sera noté $(X = x)$.

Attention contrairement à ce que suggère le mot variable, une variable aléatoire réelle est une application.

Définition : L'image $X(\Omega)$ d'une v.a.r. (variable aléatoire réelle) X est appelé ensemble fondamental de X .

Définition : Une v.a.r. est discrète si son ensemble fondamental est fini ou dénombrable.

4.2 Loi de probabilité d'une variable discrète

4.2.1 Généralités

Soit $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un espace probabilisé et X v.a.r. discrète sur Ω . On suppose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, les $x_1, \dots, x_n, \dots$ ordonnés ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \dots$) on laisse la possibilité d'un ensemble infini dénombrable de valeurs.

On appelle loi de la v.a.r. X la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ de réels définie par $\forall n \geq 1$, $p_n = p(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_n\}) = p(X = x_n)$

Remarque : avant de donner la suite p_n caractérisant la loi de X , on déterminera l'ensemble des valeurs prises par X soit $X(\Omega)$ ensemble fondamental de X .

Théorème : la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ précédemment définie vérifie :

$$(i) \quad \forall n \geq 1, p_n \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$$

$\Rightarrow (i)$ Soit $n \in [1, \dots, \text{Card } X(\Omega)]$, $p_n = p(X = x_n) \geq 0$ par construction de p sur Ω qui est positive ou nulle.

$$\Rightarrow (ii) \quad \sum_{n=1}^{|X(\Omega)|} p_n = \sum_{n=1}^{|X(\Omega)|} p(X = x_n)$$

Or les ensembles $\{(X = x_n)\}$ sont 2 à 2 incompatibles. En effet, soit $\omega \in \Omega$ qui appartiendrait en même temps à $(X = x_{i_1})$ et à $(X = x_{i_2})$ pour $x_{i_1} \neq x_{i_2}$. Alors $X(\omega) = x_{i_1} = x_{i_2}$ ce qui est contradictoire (X est une application). On peut donc par additivité de p écrire :

$$\sum_{n=1}^{|X(\Omega)|} p(X = x_n) = p\left(\bigcup_{n=1}^{|X(\Omega)|} (X = x_n)\right)$$

$$\text{Comme } \bigcup_{n=1}^{|X(\Omega)|} (X = x_n) = \Omega, \quad \sum_{n=1}^{|X(\Omega)|} p(X = x_n) = 1 \quad \blacksquare.$$

La loi de X est donc une probabilité et calculer cette loi revient à déterminer toutes les probabilités associées aux éléments de l'ensemble fondamental de X (dans le cas discret)

4.2.2 Exemples de loi d'une v.a.r. discrète

1) la loi binomiale de paramètre (n, p)

2 issues possibles, échec ou succès : on lance une pièce non équilibrée qui donne pile avec la probabilité p et face avec la probabilité q ($q=1-p$). On effectue ce lancer n fois.

Soit X la v.a.r. qui donne le nombre de fois où pile apparaît lors de ces n lancers.

On cherche la loi de X :

- que vaut $X(\Omega)$? il est clair que $X(\Omega) = [0..n]$

- soit $k \in [0..n]$ on cherche $p_k = p(\{X = k\})$ sur n lancers, pile apparaît k fois, face $n-k$ fois.

La probabilité d'obtenir de manière ordonnée k fois pile puis $n-k$ fois face s'écrit $p^k q^{n-k}$.

Comme nous ne nous soucions pas de l'ordre, il faut considérer toutes les manières d'obtenir k piles parmi nos n lancers. Le chapitre 1 nous dit qu'il existe C_n^k façons d'ordonner les k piles. Ainsi :

$$p_k = p(X = k) = C_n^k * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

2) loi géométrique de paramètre p :

On recourt à la même épreuve de Bernoulli que précédemment mais cette fois X représente la v.a.r. qui donne le rang de la première apparition de pile (on ne fait pas n lancers, on en fait jusqu'à obtenir pile ; alors le jeu s'arrête et X prend la valeur du nombre de lancers).

Ainsi $X(\Omega) = [1..n, ..]$ et :

$$\forall k \in [1.., n, ..] \quad p_k = p(X = k) = p * (1 - p)^{k-1}$$

Cette loi est appelée loi géométrique de paramètre p.

3) loi hypergéométrique

Intervient très souvent lorsque l'on se place dans le cadre du sondage d'un échantillon (nombre de pièces défectueuses d'un échantillon, sondage d'une partie d'une population....). Ou lorsqu'on extrait d'une urne un échantillon comme l'exemple ci-dessous:

Une urne contient a boules noires et b boules blanches (a et b $\geq$ n). On tire simultanément n boules de l'urne. On s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches tirées.

$$X(\Omega) = n$$

Le nombre de cas favorables à l'événement $\{X = k\}$ est (voir chapitre 1) $C_b^k * C_a^{n-k}$ (nombre de manières de prendre k boules parmi b et le reste parmi a.

Le nombre de tirages possibles est C_{a+b}^n ainsi :

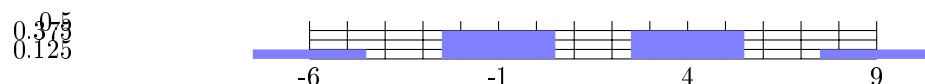
$$\forall k \in [1.., n, ..] \quad p_k = \frac{C_b^k * C_a^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

On appelle cette loi loi hypergéométrique de paramètres (a+b, n, $\frac{b}{a+b}$).

4.3 Représentation graphique d'une v.a.r. et fonction de répartition

4.3.1 Représentation graphique d'une v.a.r.

Soit X une v.a.r. définie sur Ω . On se rapporte au repère (Ox,Oy) orthonormé. Il existe plusieurs manières de tracer le graphe de X, sous forme d'histogramme, de bâtons,.. en indiquant sur l'axe (Ox) les valeurs x_i de $X(\Omega)$, en (Oy) les probabilités correspondantes, $p(X = x_i)$. Ainsi, en reprenant notre exemple du début du chapitre, on aurait :



4.3.2 Fonction de répartition d'une v.a.r.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a.r.

Quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\}$ est un événement lié à l'expérience aléatoire.

Définition : Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, on appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = p(X \leq x)$.

En reprenant l'exemple précédent :

$$\forall x \in]-\infty; -6[, F_X(x) = 0$$

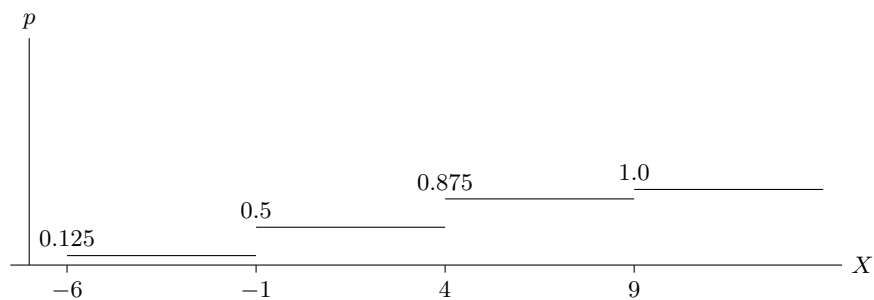
$$\forall x \in [-6; -1[, F_X(x) = \frac{1}{8}$$

$$\forall x \in [-1; 4[, F_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in [4; 9[, F_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\forall x \in [9; +\infty[, F_X(x) = 1.$$

ce qui nous donne le graphe suivant :



Remarque :

- F_X est croissante, en effet dans notre exemple, en $x=3$:

$$\begin{aligned} F_X(3) &= p(X \leq 3) \\ &= p(\{X < -6\} \cup \{-6 \leq X < -1\} \cup \{-1 \leq X < 4\}) \\ &= p(\{X < -6\}) + p(\{X = -6\}) + p(\{X = -1\}) \text{ les événements sont disjoints 2 à 2} \\ &= 0 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ quelle que soit la v.a.r. X .

4.4 Espérance d'une v.a.r. discrète

Reprenons notre urne du début du chapitre avec a boules noires et b boules blanches. Notre joueur aimerait savoir, au bout d'un grand nombre de tirage aux mêmes conditions, combien lui fait gagner, *en moyenne*, le j ème tirage. Dans toutes les séries de n tirages effectuées, quand une boule blanche sort au

jème tirage, le gain est de $j * X_j(\omega) = j$ quand c'est une noire, de $j * X_j(\omega) = 0$ sinon (ω correspond au tirage (n-uplet) c'est un événement élémentaire de Ω). La probabilité que la boule tirée au jème coup soit blanche est $\frac{b}{a+b}$, qu'elle soit noire, $\frac{a}{a+b}$.

Ainsi, la moyenne de gain recherchée au jème tirage serait $M_j = j * \frac{b}{a+b} + 0 * \frac{a}{a+b} = \frac{bj}{a+b}$.

Si on nomme Y_j la variable aléatoire associée au gain du jème tirage, $Y_j(\omega) = jX_j(\omega)$ la moyenne M_j précédente sera l'espérance de la variable aléatoire Y_j notée $E(Y_j)$.

Si maintenant le joueur voulait connaître son gain moyen au cours des n tirages, il suffirait de calculer :

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n \frac{i * b}{a+b} = \frac{b}{a+b} * \sum_{i=1}^n i = \frac{b}{a+b} \frac{n(n+1)}{2}$$

On remarque que $E(\sum_{j=1}^n Y_j) = \sum_{j=1}^n E(Y_j)$ (linéarité de l'espérance).

On appelle variance de X, $V(X)$ l'espérance du carré de la variable aléatoire centrée :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E(X))^2$$

On appelle écart-type la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}^1$$

Théorème : (Formule de Kœnig ou de Huyghens) :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E(X))^2 &= \sum_{i=1}^n p_i(x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ par définition}$$

$$\begin{aligned} &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Définition : Soit X une v.a.r. sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$
Posons $p_i = p(\{X = x_i\})$ pour tout i.

On dit que X admet une espérance si la série $\sum_{i \geq 1} x_i p_i$ est convergente (en valeur

¹Variance et écart-type mesurent la dispersion autour de la moyenne et permettent donc de mieux cerner l'allure de la distribution de probabilité

absolue).

On appelle espérance de X le réel :

$$E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

Remarque : l'absolue convergence est nécessaire sinon, sous réserve de réindexation des (x_i) on pourrait se retrouver avec deux résultats différents pour une même espérance (Th de Rieman). Le terme espérance a une explication historique. Elle a été introduite au XVII^{ème} siècle avec le début des probabilités (Pascal). Elle représentait le gain qu'un joueur était en droit d'espérer dans un jeu de hasard lorsqu'il jouait plusieurs parties.

L'espérance apparaît comme la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X. En terme de jeu, si X désigne un gain, $E(X)$ est le gain moyen que l'on peut espérer. Si $E(X)=0$, le jeu est équilibré, si $E(X)<0$ on perd plus qu'on ne gagne.

Attention : deux variables aléatoires peuvent avoir la même espérance mais des caractéristiques de dispersion très différentes. Pour s'en convaincre, reprenons le tout premier exemple avec le lancer trois fois de suite d'une pièce. On a dans cet exemple $E(X) = \frac{1}{8} * (-6) + \frac{3}{8} * (-1) + \frac{3}{8} * 4 + \frac{1}{8} * 9 = \frac{3}{2}$
Le gain moyen est donc de 1,5 euro.

Calculons la variance :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{8} * 36 + \frac{3}{8} * 1 + \frac{3}{8} * 16 + \frac{1}{8} * 81 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4}$$

et $\sigma(X) \simeq 4,3$. Pour un gain de moyen 1,5 on peut dire que les gains possibles sont très dispersés autour de la moyenne.

Si maintenant on étudie un autre jeu d'argent dont la loi de la probabilité de la variable aléatoire Y est explicitée dans le tableau ci-dessous :

y	1	$\frac{3}{2}$	2
p(Y = y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

$E(Y) = \frac{3}{2}$ comme précédemment mais $V(Y) = \frac{1}{16}$ et $\sigma(Y) = \frac{1}{4}$. La loi est beaucoup moins dispersée autour de son espérance que la loi de X.

Théorème : linéarité de l'espérance :

L'espérance mathématique est une forme linéaire

i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X, Y v.a.r.$ définies sur le même espace probabilisé,

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$$

On considère pour cette démonstration Ω fini, on garde les notations habituelles.

L'idée est de passer par la décomposition en événements élémentaires :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i * p_i = \sum_{i=1}^n x_i * p(X = x_i)$$

$$\text{Or } p(X = x_i) = p(\{X^{-1}(x_i)\}) = \sum_{\omega \in \{X^{-1}(x_i)\}} p(\omega)$$

$$\text{Ainsi } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{\omega \in \{X^{-1}(x_i)\}} p(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in \{X^{-1}(x_i)\}} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Car $\{X^{-1}(x_i)\}$ forme un système complet d'événements.

$$\begin{aligned}
\text{Alors } E(\lambda X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X(\omega) + Y(\omega))p(\omega) \\
&= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega) - (\text{linéarité dans } \mathbb{R}) \\
&= \lambda E(X) + E(Y) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.5 Opérations sur les espérances et la variance

On abordait dans le chapitre 2 l'indépendance en probabilités, voici cette même notion dans le cas de v.a.r. :

Définition : 2 v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, p((X = x) \cap (Y = y)) = p(X = x) * p(Y = y)$$

Ce qui nous intéresse dans cette notion est le théorème qui suit :

Théorème :

Soient X et Y 2 v.a.r. indépendantes dont l'ensemble des valeurs est fini alors : $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Attention, la réciproque est fausse, un contre exemple sera développé pendant le cours.

L'espérance que l'on sait additive (par linéarité) devient stable par multiplication. La variance devient additive.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E(XY) &= \sum_{x,y} xy * p(X = x \cap Y = y) = \sum_{x,y} xy * p(X = x)p(Y = y) \\
&= \sum_x x * p(X = x) \left(\sum_y y * p(Y = y) \right) \\
&= E(Y) * \sum_x x * p(X = x) = E(X)E(Y) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.6 Deux inégalités importantes

Théorème : (Inégalité de Markov)

Si X est une v.a.r. positive dont l'espérance existe alors :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

⇒ On suppose $X(\Omega)$ fini. On démontre l'inégalité dans ce cas : on ordonne alors les indices pour avoir $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ alors, soit $a \leq x_n$. Notons alors i_0 le plus petit indice pour lequel $a \leq x_{i_0}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \geq \sum_{i=i_0}^n p_i x_i \geq a \sum_{i=i_0}^n p_i = a \sum_{i=i_0}^n p(X = x_i) = a * p(X \geq a)$$

Si en revanche $a > x_n$, $p(X \geq a) = 0$ l'inégalité est triviale.

Théorème : (Inégalité de Bienaymé Tchebychev)

Si X est une v.a.r. dont l'espérance et la variance existent :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, p(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}}$$

Cette inégalité majore le risque qu'une variable aléatoire prenne des valeurs trop excentriques.

exemple d'application : exercice 6 TD 4

⇒ la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est positive, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* p((X - E(X))^2 \geq a) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a}$$

Or $V(X) = E((X - E(X))^2)$

en prenant $a = t^2$ et comme $(X - E(X))^2 \geq a$ soit encore

$|X - E(X)| \geq \sqrt{a} \quad (a \geq 0)$

on a bien $p(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$ ■