

Enseignant : Nicolas Dos Santos TD 2609 Contrôle du 24 Octobre 2016	Nom : Prénom : Signature :
---	----------------------------------

Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.
Cette feuille doit être rendue signée et placée à l'intérieur de la copie.
Aucun appareil électronique ne doit être utilisé sous peine d'avoir une note de 0.

Exercice 1 : Application linéaire et diagonalisation (11 pts)

Soit $f(x,y,z) = (-3x-y-z, x-y+z, x+y-z)$

1. Donnez l'ensemble de départ et d'arrivée de f .
2. Justifiez rapidement mais clairement que f est linéaire.
3. Quelle est la matrice représentative M de f .
4. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de M .
5. La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifiez.
6. Justifiez l'existence et calculez les matrices P et D telles que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale. On rangera les valeurs propres par ordre croissant et il est inutile de calculer l'inverse de P .
7. Est-ce que f est bijective ? Justifiez.

Exercice 2 : Calcul de dérivée (5 pts)

Soit $f(x, y) = xy - \ln(x^2 - y^2)$ une fonction de 2 variables.

1. Donnez l'ensemble de définition de f .
2. Déterminez le gradient de f .
3. Déterminez la matrice hessienne de f .

Exercice 3 : Famille de vecteurs (4 pts)

Soit a un paramètre de \mathbb{R} . On définit 3 vecteurs de \mathbb{R}^3

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Est-ce que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base ?
2. Si oui, exprimez les coordonnées de $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.