Espace vectoriel et application linéaire

G : ens + loi sur G
$+$: applicat° de $G\times G \to G$ qui à $(x,y) \in G\times G$ associe le pt $x+y$

$(G,+)$ est un groupe si
loi est associative
existence él^t neutre et inverse $\exists$

Soit K un ens muni de deux lois $+$ et $*$
Déf : $(A,+,*)$ est un anneau ssi,
$(A,+)$ groupe commutatif ayant pr él^t neutre un él^t noté 0.
$*$ est une loi associative
La xcat° est distributive à g et à dte sur l'addition
Ainsi $a*(b+c) = a*b + a*c$ et $(a+b)*c$
$= a*c + b*c$
$*$ admet un él neutre noté 1
On dit qu'un anneau est commutatif lorsque la loi $*$ est commutative.

Soit G un ens muni d'une loi $*$
On dit que $a \in G$ est un él absorbant pour G ssi
$\forall x \in G : a*x = x*a = a$
Dém : Soit $x \in A$
$0*x = (0+0)*x$ of iii
$0*x = 0*x + 0*x$
$(A,+)$ est un groupe
il existe $-0*x$ que j ajoute à l'égalité
$0*x + (-0*x) = [0*x + 0*x] + (-0*x)$

$$0 = 0 * x + [0 * x + (-0 + x)]$$
$$= 0 * x + 0$$
$$0 = 0 * x$$

et 0 est un élt absorbant.

Prop : soit A un anneau commutatif alors 0 est un él absorbant.

Déf : $(K, +, *)$ est un corps (resp commutatif) si :

(i) $(K, +, *)$ est un anneau (resp com)

(ii) Tout él ≠ distincts de 0 admet un inverse par la loi $*$.

Ex : Soit $\mathbb{Z}$ l'ens des entiers naturels positifs et négatifs

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

$(\mathbb{Z}, +, *)$ est un anneau commutatif.

1.2 Espaces vectoriels

Soit E un ens et $(K, +, *)$ un corps

Considérons que E est muni de deux lois :

une loi interne $\oplus \begin{cases} E \times E \to E \\ (X, Y) \mapsto X \oplus Y \end{cases}$

une loi externe : $\begin{cases} K \times E \to E \\ (\lambda, X) \mapsto \lambda X \end{cases}$

$E = \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

$$\lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Déf : E muni de ces 2 lois est un K-esp vect.

Rmq : les él de K sont ~~st~~ appelés les scalaires
Enfin ceci est implicite ds cette déf ms on doit avoir la stabilité pr la loi interne (ie $\forall (X,Y) \in E \times E : X \oplus Y \in E$)

Prop 1) $\forall x \in E, 0_K . x = 0_E$

Dém Prop 1 Soit $X \in E$

$$0_K \times X = (0_K + 0_K).X$$
$$= 0_K . X \oplus 0_K . X$$
$$0_K . X = 0_E$$

2) $\forall \lambda \in K, \lambda . 0_E = 0_E$

Dém Prop 2 $\lambda . 0_E = \lambda . (0_E \oplus 0_E)$
$$= \lambda . 0_E \oplus \lambda . 0_E$$
$$\lambda . 0_E = 0_E$$

3 $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, -(\lambda . x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x)$

$-(\lambda . X)$ opposé de $\lambda . X$ pour $\oplus$
$(-\lambda). X$ opposé de λ pour + (addition du corps) fois X

$\lambda.(-X)$ λ x opposé de X pour $\oplus$

$(\lambda - \lambda).X = 0_E = \lambda . X \oplus (-\lambda).X$
$\lambda . [X \oplus (-X)] = 0_E = \lambda . X \oplus (\lambda . (-X)]$.

4 : $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \lambda . x = 0_E \Leftrightarrow [\lambda = 0_K$ ou $x = 0_E]$

Preuve : $\Leftarrow$ Soit $\lambda = 0_K$
$\lambda . X = 0_K . X = 0_E$ cf i
Soit $X = 0_E$ $\lambda . X = \lambda . 0_E = 0_E$ cf ii

$\Rightarrow$ implique

A $\Rightarrow$ B ou C
A ET (Non B) $\Rightarrow$ C

On suppose $\lambda . X = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$

$\exists \lambda^{-1}$ tq $\lambda^{-1} \times \lambda = 1$

$\lambda X = 0_E \Rightarrow \lambda^{-1} . (\lambda . X) = \lambda^{-1} 0_E = 0_E$

$(\lambda^{-1} \times \lambda) . X = 0_E$

$1 . X = 0_E$

$X = 0_E$ (cf 8)

Ex :

a) R^n avec les prop. usuelles d'addition de vecteurs et de multiplicat° par un scalaire

Ainsi R^3 muni de 2 lois suivantes :

1) $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

Sous espace vectoriel : sous ens.

$F \subseteq E$

(i) F est un ssev

(ii) $\forall (X, Y) \in F \times F \quad \forall \lambda \in K : X + Y \in F$ et $\lambda X \in F$

(iii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in K \times K : \lambda X + \mu Y \in F$

Soit un plan ac un vecteur $(2, 1)$

Soit $F = \{\vec{0}\}$

Ss e v de $\mathbb{R}^2$	Dim
$F = \{\vec{0}\}$	0
dtes passant par l'origine	1

Ss ev de $\mathbb{R}^3$	Dim
$\vec{0}$	0
dtes passant / origine	1
plan passant par P_0	2
espace entier	3

peut tomber au partiel

Prop : Soit F_i une famille de sev alors $F = \bigcap_i F_i$ est aussi un sev.

Preuve :

Soit X et Y deux él de $F = \bigcap_i F_i$ (intersection)

Soit α et β (2 scalaires) $\in K^2$

$$\forall i \quad \begin{matrix} X \in F_i \\ Y \in F_i \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\alpha X + \beta Y}_{\text{combi li}} \in F_i$$

$$\Rightarrow \alpha X + \beta Y \in \bigcap_i F_i$$

donc F stable par combinaison linéaire et F est un ssev.

2 Famille libre et liée de $\vec{v}$

Soit E un K espace vectoriel et $V_1, V_2, \dots, V_p$ des $\vec{v}$ de E.

Les p $\vec{v}$ st linéairement dépendants s'il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ non tous nuls tq $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \vec{0}$

Déf : p vecteurs de E sont dits linéairement indép ssi :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$$

~~don~~ on dit aussi que la famille de $\vec{v}$ est libre

Ex p 9

Ex :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille libre ou liée ?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -5\beta = 0 \\ -3\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

la famille est libre

Famille liée :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta = \beta \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \end{pmatrix} / \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sol est une droite dirigée par $(-2;1)$

infinité de solution.

la famille est (liée
linéairement dependante).

Famille génératrice ssi ts $\vec{v}$ de E peut s'écrire :
comme combi linéaire de ces $\vec{v}_i$:

$\forall X \in E : \exists\, \alpha_1 \dots \alpha_p$ tq $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i$ est appelé une décomposition de X.

Rmq : Si $p\ \vec{v}$ engendrent E, alors la famille de vecteurs composée de ces $p\ \vec{v}$ + n'importe quel $\vec{v}$ engendre aussi E.

Ex₁ :
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille génératrice ?

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases} \quad L_2 - 2L_1 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -\beta = y - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = y - x \\ \beta = 2x - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y-x)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (2x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La famille est génératrice.

Ex₂ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ génératrice ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + 4\beta = y \end{cases} \quad L_2 - 2L_1 \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 0\alpha + 0\beta = y - 2x \end{cases}$$

pas générateur de $\mathbb{R}^2$ tout entier
(la famille ne génère que le ssev $y - 2x = 0$)

<u>Base</u>
= fam libre et gén.

<u>Dém</u> (i) La famille $v_1, v_2, \dots v_p$ est une base
(ii) Tt vecteur se décompose de manière unique sur $v_1, v_2, \dots v_p$

p 10

$(ii) \Rightarrow (i)$

* La famille est génératrice par définition

* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \vec{0} = \sum_{i=1}^{p} 0 V_i$

par unicité $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0 \ \forall i$

donc $V_1 - V_p$ base.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Comme $V_1 \dots V_p$, génératrice.

$\exists \alpha_i$ tq $X = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i$

Supposons $\exists \beta_i$ tq $X = \sum_{i=1}^{p} \beta_i V_i$

donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i V_i$

$\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - \beta_i) V_i = \vec{0}$

or $v_1 - v_p$ libre $\Rightarrow \forall i \ \alpha_i - \beta_i = 0$

d'où $\forall i \ \beta_i = \alpha_i$

donc la décomposit° est unique

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$P(X) = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0$$

Une base de polynome de degré au plus 3

$(1, X, X^2, X^3)$

Si on multiplie chaque X

on a X^3 au maximum.

2 _ 3 Rang d'une famille de vecteurs.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} & \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ L_2 - L'_1 & \beta + 2\gamma = 0 \\ L_3 - L'_1 & -\gamma = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est libre Rang = 3

peut tomber au partiel

appli li : chacune des composantes de ~~l'im~~ doit ê une combi li des coordonnées de l'antécédent
chacune des coordonnées doit ê de type $\alpha X + \beta Y$

appli li : ssi :
(i) $\forall (X, Y) \in E^2 : u(X+Y) = u(X) + u(Y)$.
(ii) $\forall (\alpha, X) \in K \times E : u(\alpha X) = \alpha . u(X)$.

Im d'une combi li est une combi li des images

$\Rightarrow$ Soient α et $\beta \in K^2$
$(X, Y) \in E^2$

$$u(\underbrace{\alpha X}_{X'} + \underbrace{\beta Y}_{Y'}) \underset{\text{d'après (i)}}{=} u(\alpha X) + u(\beta Y)$$
$$\underset{\text{d'après (ii)}}{=} \alpha u(X) + \beta u(Y).$$

$\Leftarrow$ Montrons (i)

Si $\alpha = \beta = 1$, on a directement

$u(1X + 1Y) = 1\,u(X) + 1\,u(Y)$

$u(X+Y) = u(X) + u(Y)$

Montrons (ii)

En posant $\beta = 0$ on a

$u(\alpha X + 0Y) = \alpha u(X) + 0\,u(Y)$

$u(\alpha X) = \alpha u(X)$

cond nécessaire pr que u soit linéaire est que $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

ex $u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ pas linéaire.

P12

Ex : Mq l'im des p $\vec{v}$ linéairement dép de E par une applicat° linéaire constitue une famille de p $\vec{v}$ linéairement dépendants de F.

Soient $V_1 \ldots V_p$ liés dans E,

u linéaire de E ds F

Par def, je sais qu'il existe des α_i non tous nuls tq

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i = \vec{0}_E$$

$$u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i\right) = u(\vec{0}_E).$$

Par linéarité :

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, u(V_i) = \vec{0}_F$$

Donc $u(V_1) \ldots u(V_p)$ est liée dans F.

On a aussi démontré que si u linéaire
$u(v_1) \dots u(v_p)$ libre
$\Rightarrow v_1 \dots v_p$ libre.

3.1 Image et rang d'une application linéaire

Montrons (ii).
En posant $\beta = 0$ on a $u(\alpha X + 0Y) = \alpha u(X) + 0 u(Y)$
$u(\alpha X) = \alpha u(X)$.
Soient $(X, Y) \in (\mathrm{Im}\, u)^2$
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$X \in \mathrm{Im}\, u \Rightarrow \exists x \in E \; u(x) = X$
$Y \in \mathrm{Im}\, u \quad \exists y \in E \; u(y) = Y$

p 12
Calcul du rang de l'appli li :

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

$$u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rang}\; u = \mathrm{Rang} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

Prop u est (surjective ssi / ou - 1 ant) $\mathrm{Rg}(u) = \dim F$

et combi li de $\vec{v}$ $\Rightarrow$ ssev

combi li — appli li

Noyau : $\operatorname{Ker} u = \{ X \in E \ / u(X) = \vec{0} \}$

$\operatorname{Ker} u$ est un ssev de E.

P13 **Preuve** :

Soient $(X, Y) \in \operatorname{Ker} u$

$(\alpha, \beta) \in K^2$

$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y)$

$= \alpha \vec{0_F} + \beta \vec{0_F} = \vec{0_F}$

Conclusion : $\alpha X + \beta Y \in \operatorname{Ker} u$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} u$ est un ssev.

car Ker u est une combi li

Prop : u est injective ssi $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$

p13 **Preuve**

u injectif ssi $\forall (X, Y) \in E^2$

$u(X) = u(Y) \Rightarrow X = Y$

$\Rightarrow$ Soit $X \in \operatorname{Ker} u$.

$u(X) = \vec{0_F} = u(\vec{0_E})$

Par injectivité $\Rightarrow X = \vec{0_E}$

Conclusion $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\}$

$\Leftarrow$ Soient $(X, Y) \in E^2$ tq $u(X) = u(Y)$

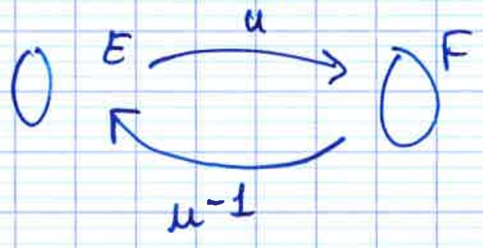
$u(X) - u(Y) = \vec{0_F}$

$u(X - Y) = \vec{0_F}$

$X - Y \in \operatorname{Ker} u = \{\vec{0_E}\}$ car $u(\vec{0_E}) = \vec{0_F}$

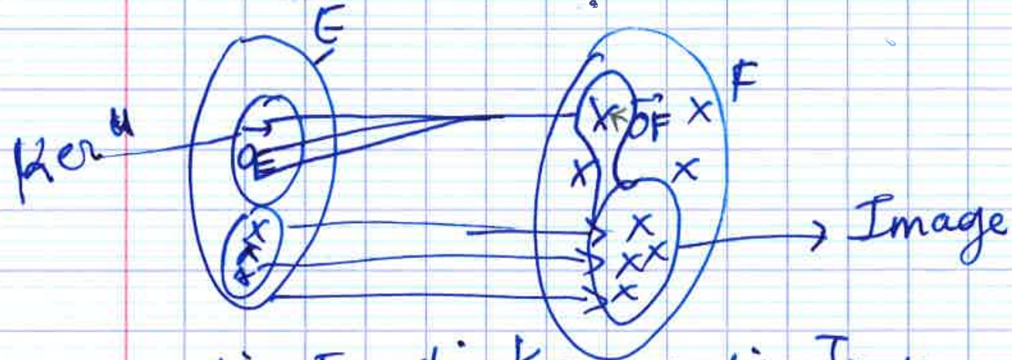
donc $X - Y = \vec{0_E} \Rightarrow X = Y$ donc injective

P13 Mq si u est une applicat° linéaire bijective alors u^{-1} est une applicat° linéaire.



$u^{-1}(\alpha X + \beta Y)$
$(X, Y) \in F^2$

$\mathrm{Rang}(u) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$.



$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u$
$= \dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Rang}\, u$

P14 Ex 4) Mq si u est injective et si G est un système libre de E alors $u(G)$ est un système libre de F

Soit u injective
$v_1 .. v_p$ famille libre
$u(v_1) \dots u(v_p)$ libre?

Soit α_i tq $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(v_i) = \vec{0}$

par linéarité

$u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i\right) = \vec{0}_F$

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}\, u = \{\vec{0}\}$ car u injectif.

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \vec{O_E} \Rightarrow \forall i \quad \alpha_i = 0$$

donc $u(v_1) \dots u(v_p)$ libre

Chap 2 Les matrices

I Opérat° sur les matrices

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x \end{pmatrix}$$

~~énoncé~~

$\cancel{M = [u(1,0) ; u(0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}$

Ex : on change la base de départ.
au lieu de calculer l'image dans la base canonique

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M = \left[u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^{\beta}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{\beta}$$

énoncé : p 16

$$u(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$$

calculer la Matrice rep de u ac cô base de départ $(1,1)$ et $(1,-1)$ et base d'arrivée canoniq

$$\begin{array}{cc} (1,1) & (1,-1) \end{array}$$
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer $u\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ par la méthode matricielle