UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE
UFR de GESTION
Examen de Mathématiques
LICENCE 2ème année
MARS 2020, Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portable ou appareils électroniques connectés interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Algèbre linéaire (7,5 points)

Soit $u(x,y,z) = (-x+2y, y, -2x+2y+z)$

a) Calculez le noyau et l'image de u. Quelles propriétés peut-on en déduire ?

b) Déterminez A, la matrice représentative de fu pour les bases canoniques.

c) Calculez la matrice A^{-1} lorsque cela est possible.

d) Trouvez le ou les antécédents de $(2,-1,1)$ par u.

e) Déterminez les valeurs propres de A. (Triez les v.p. par ordre croissant et vérifiez vos résultats avec les méthodes usuelles).

f) La matrice A est-elle diagonalisable ? (Justifiez soigneusement, pour les vecteurs propres on utilisera toujours comme **paramètres les dernières variables** puis on prendra des vecteurs propres dont la 1ere composante non nulle vaut 1).

g) Donnez toutes les matrices de la décomposition en matrice diagonale. (On calculera donc P^{-1}).

II Approximation (4,5 points)

Soit $f(x,y) = ye^x + \ln(1+x^2+y^2) + yx^2$

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0;0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(-0.1;0.1)$.

e) Donnez l'équation du plan tangent au graphe de f en $(1;0)$.

III Optimisation (6 points)

On cherche à optimiser la fonction suivante :
$\Psi(x,y,z) = x^2 \cdot \ln(y^2) - y^2 z + z + x^2 - 2y$

Normalement on devrait exclure du domaine d'optimisation les points tels que $y = 0$, mais on se contentera d'optimiser sans contrainte sans se préoccuper de ce léger problème sur le domaine de définition.

a) Déterminez les points candidats du problème d'optimisation.

b) Déterminez la nature des points candidats.

c) Quel est le maximum global et le minimum global de la fonction Ψ ?

d) Déterminez les optima de la fonction Ψ sur le plan défini par $y = 1$. On fera une conclusion propre sur l'optimisation dans $\mathbb{R}^3$ sous la contrainte $y = 1$.

IV Question de cours (2 points)

Soit u_n une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue.

Enoncer le théorème de convergence qui précise la limite d'une telle suite lorsqu'elle converge. On rappellera la définition mathématique de la convergence et la définition mathématique de l'autre terme employé dans le théorème. On proposera une démonstration de ce théorème.