

Chapitre 3

Indépendance et probabilités conditionnelles

3.1 Notion d'indépendance en probabilité

Definition : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Attention à ne pas confondre indépendance et incompatibilité ; A et B sont incompatibles si et seulement si $p(A \cap B) = 0$ c'est à dire si l'événement $A \cap B$ est presque impossible.

Exemple d'indépendance en probabilité :

On lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'événement : "le premier lancer amène 4" et B l'événement "le second lancer amène 6". La réalisation ou non de l'événement A ne nous apprend rien sur la réalisation de l'événement B. Ainsi A et B sont indépendants et $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$.

En revanche l'événement C "la somme des résultats des deux lancers vaut 5" n'est indépendant ni de A ni de B. (Il suffit pour s'en convaincre de penser à ce qu'apporte la connaissance du résultat de A "le 6 est sorti" sur la réalisation de C)

Soit l'événement $D = A \cap C$

Il peut se traduire par D: "le premier lancer amène 4, le second lancer amène 1" et ainsi $p(A \cap C) = p(D) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Etudions maintenant le nombre de cas où C est réalisé :

il est réalisé pour les couples suivants : $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ ainsi, comme on est dans un cas d'équiprobabilité, $p(C) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} =$

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

On a donc $p(A) * p(C) = \frac{1}{6} * \frac{1}{9} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} = p(A \cap C)$

Ainsi A et C ne sont pas indépendants.

On peut également constater que B et C sont incompatibles ; en effet si le second lancer amène 6, la somme des deux lancers ne pourra être 5 et ainsi $p(B \cap C) = p(\emptyset) = 0 \neq p(B) * p(C)$

Proposition : Si A et B sont indépendants, il en est de même pour $\overline{A}$ et B, $\overline{B}$ et A et $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

$\Rightarrow B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ (décomposition de B sur deux incompatibles)
Alors $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ (*)
or,

$$\begin{aligned} p(B) - p(A \cap B) &= p(B) - p(A) * p(B) \quad \text{-- indépendance de A et B} \\ &= p(\overline{A} \cap B) \quad \text{-- en invoquant (*)} \end{aligned}$$

Ainsi $p(\overline{A} \cap B) = (1 - p(A)) * p(B) = p(\overline{A}) * p(B)$
d'où l'indépendance de $\overline{A}$ et B.

idem pour $\overline{B}$ et A, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ en prenant $\overline{A}$ et B comme événements indépendants.

3.2 Probabilités conditionnelles

Partons d'un exemple : le tableau ci-dessous comptabilise le nombre d'étudiants ayant eu la moyenne lors de leur dernier partiel de math L2 sur une promotion de 800 étudiants :

Note S	Cursus bac S	Cursus bac ES
Note ≥ 10	220	200
Note < 10	80	300

L'univers Ω choisi est ici fini, il est composé des 800 étudiants catégorisés par leur note au dernier partiel et leur filière. Ainsi, d'après ce tableau, la probabilité pour un étudiant d'avoir eu moins de 10 au dernier partiel sachant qu'il a passé le bac ES est

$$\frac{|M \cap ES|}{|ES|} = \frac{300}{500} = 0,6$$

en posant M l'événement "obtenir moins de 10 au dernier partiel" et ES l'événement "avoir passé un bac ES".

De même la probabilité pour un étudiant d'avoir moins de 10 au dernier partiel sachant qu'il a suivi un cursus S est :

$$\frac{|M \cap S|}{|S|} = \frac{80}{300} \simeq 0,27$$

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité p et A et B deux événements de Ω tels que $p(B) \neq 0$. On suppose comme dans notre exemple, que tous les événements élémentaires de Ω sont équiprobables. La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé est notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ et vaut :

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

égalité obtenue en remarquant que

$$p(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \text{ et } p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

De façon générale, soit $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle (i.e. qui n'est pas quasi impossible), alors le nombre

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

est appelé probabilité de A sachant B .

Vérifions que l'application $p_B : \wp(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$A \mapsto \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

est une probabilité sur Ω :

$$p_B(\Omega) = \frac{p(\Omega \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements 2 à 2 incompatibles de $\wp(\Omega)$,

$$p_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{p\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B\right)}{p(B)} = \frac{p\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)\right)}{p(B)}$$

Les (A_n) sont deux à deux disjoints ainsi les $A_n \cap B$ également d'où il vient par dénombrable additivité de p :

$$p_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n \cap B)}{p(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{p(A_n \cap B)}{p(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_B(A_n)$$

Ainsi p_B définit bien une probabilité sur Ω .

La probabilité de A sachant B se note désormais p_B . Certains livres font encore apparaître la notation $p(A/B)$ qui avait le désavantage de ne pas mettre en valeur qu'il s'agit alors d'une nouvelle loi de probabilité sur Ω différente de p . (on pouvait penser que c'était la probabilité p appliquée à l'événement A/B , A sachant B ce qui n'est pas exact.

Exemple : Une urne U_1 contient 3 boules blanches et 5 boules noires, une urne U_2 4 boules blanches et 4 boules noires. On s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante :

On choisit au hasard une urne puis on y pioche deux boules. L'univers est donc $\Omega = \{(i, j, k) / 1 \leq i \leq 2, j, k \in [1..8]\}$

i représente l'urne U_i choisie, j et k les numéros des boules tirées si on les numérote de 1 à 8.

Comme on l'a remarqué ci-dessus, p_{U_1} est une nouvelle probabilité qui n'opère pas nécessairement sur le même espace probabilisable. En effet dans le cas de p_{U_1} , on définit un Ω' associé à cette nouvelle probabilité qui est $\Omega' = \{(i, j) / i, j \in [1..8], i \neq j\}$

Ainsi sur Ω , le nombre d'issues possibles était $C_2^1 * C_8^2$ soit

$$\frac{2 * 8 * 7}{2} = 56$$

Sur Ω' associé à p_{U_1} et p_{U_2} , le nombre d'issues possibles est C_8^2 soit 28 issues possibles.

La probabilité de l'événement A : "obtenir une boule blanche et une boule noire" sachant que l'urne U_1 est choisie est donc :

$$p_{U_1}(A) = \frac{C_3^1 * C_5^1}{28} = \frac{3 * 5}{28} = \frac{15}{28}$$

sachant que l'urne U_2 est choisie elle est :

$$p_{U_2}(A) = \frac{C_4^1 * C_4^1}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

Remarque : l'indépendance de deux événements A et B en probabilité a été définie par $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$. Elle peut maintenant se noter avec les probabilités conditionnelles comme : A et B indépendants en probabilité ssi : $p_A(B) = p(B)$ en effet

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) * p(B)}{p(A)} = p(B)$$

3.3 Notion d'indépendance mutuelle

Définition : Soit $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un univers probabilisé. On dit que n événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si :

$\forall k \in [1..n], \forall (i_1 \dots i_k) \in [1..n]^k$, les i_j tous distincts, $p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}) * p(A_{i_2}) * \dots * p(A_{i_k})$

Proposition : L'indépendance mutuelle de n événements entraîne leur indépendance deux à deux.

$\Rightarrow$ il suffit de prendre dans la définition précédente $k = 2$ et tous les A_i sont indépendants deux à deux.

Attention : La réciproque n'est pas vraie : soit l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés discernables, le dé rouge N°1 et le dé vert N°2. $\Omega = \{(i, j) \in [1..6]^2\}$ avec i résultat dé rouge, j résultat dé vert.

On s'intéresse aux événements :

- A : "la somme des lancers est paire"
- B : "le lancer N°1 est pair"
- C : "le lancer N°2 est pair"

il est clair que

$$p(B) = \frac{3 * 6}{36} = \frac{1}{2} (\text{cardinal des cas favorables lancer 1 et lancer 2 sur cardinal de } \Omega)$$

de même

$$p(C) = \frac{1}{2}$$

Listons les événements élémentaires favorables à A :

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1), (5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$

et ainsi

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$p(A \cap B) = p(B \cap C) = p(A \cap C)$ (par construction des événements)

or

$$p(B \cap C) = \frac{3}{6} * \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = p(B) * p(C)$$

Ainsi, A, B et C sont indépendants deux à deux. Il nous manquerait pour montrer l'indépendance mutuelle d'après la définition : $p(A \cap B \cap C) = p(A) * p(B) * p(C)$.

Or la réalisation de B et C rend A certain ce qui se traduit ainsi $p(A \cap B \cap C) = p(B \cap C) = p(B) * p(C)$, comme $p(A) \neq 1$, on a donc $p(A \cap B \cap C) \neq p(A) * p(B) * p(C)$

Ceci prouve que A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants et donc prouve que, malgré l'indépendance deux à deux l'indépendance mutuelle n'est pas acquise.

3.4 Formule des probabilités composées

Lemme : soit $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un espace probabilisé et A et B deux événements tels que $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = p(A) * p_A(B)$.

Ce lemme découle directement de la définition de p_B . On peut néanmoins le généraliser à n événements comme ci-dessous :

Théorème , formule des probabilités composées : Soient $(\Omega, \wp(\Omega), p)$ un espace probabilisé et $A_1, ..A_n$ n événements tels que $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1) * p_{A_1}(A_2) * ... * p_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n)$

Pour le montrer on réécrit le second membre ainsi :

$$p(A_1) * \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_1)} * ... * \frac{p(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n)}{p(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_{n-1})} = p(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n)$$

Les dénominateurs se simplifient avec le numérateur de la fraction suivante et il ne reste que le premier membre de l'égalité du théorème.

Exemple d'application de la formule des probabilités composées :

Quelle est la probabilité qu'il y ait deux personnes nées le même jour dans une assemblée de n personnes?

On s'intéresse à l'événement A : "il n'y a pas deux personnes nées le même jour". L'événement $\bar{A}$ est la réponse attendue.

Pour tout $i \in [1..n]$ notons A_i l'événement "il n'y a pas deux personnes nées le même jour parmi les i premières personnes du groupe (de n personnes, $i \leq n$). Il vient

$$p_{A_1 \cap ... \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{(365 - (i - 1))}{365}$$

en effet le numérateur représente le nombre de jours favorables (reste après i-1 dates anniversaire déjà attribuées) et le dénominateur le nombre de cas totaux. En appliquant la formule des probabilités composées, on a alors :

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= p(A_1) * p_{A_1}(A_2) * ... * p_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= 1 * \frac{364}{365} * \frac{363}{365} * ... * \frac{365 - n + 1}{365} \\ &= \frac{364!}{365^{n-1} * (365 - n)!} \end{aligned}$$

Revenant à l'événement recherché $\bar{A}$ on obtient :

$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{364!}{365^{n-1} * (365 - n)!}$$

On présente dans le tableau ci-dessous les résultats pour n variant de 10 à 60 ; la probabilité est exprimée en % :

n	10	20	30	40	50	60
$p(\overline{A})$	11,7	41,1	70,6	89,1	97	99,4

Sur une classe de 30 étudiants, il y a 7 chances sur 10 que 2 d'entre eux aient la même date anniversaire.

Remarque ou exercice : On aurait aussi pu résoudre ce problème par dénombrement.

3.5 Formule des probabilités totales

On appelle système complet d'événements de Ω une famille finie ou dénombrable d'événements $\{B_i\}_{i \in I}$ telle que :

- (i) $\forall i \in I, B_i \neq \emptyset$
- (ii) $\forall i, j \in I, (i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset)$ (les B_i sont incompatibles 2 à 2)
- (iii) $\cup_{i \in I} B_i = \Omega$

En termes ensemblistes, les (B_i) forment une partition de Ω .

Théorème : Formule des probabilités totales :

Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements tel que $p(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$ alors :

$$\forall A \in \wp(\Omega), p(A) = \sum_{i \in I} p_{B_i}(A) * p(B_i)$$

$$\Rightarrow \text{Par construction, } \Omega = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ ainsi } A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

les B_i étant disjoints, il en est de même pour $A \cap B_i$ et ainsi

$$p(A) = p\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i \in I} p(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} p_{B_i}(A) * p(B_i) \quad \blacksquare$$

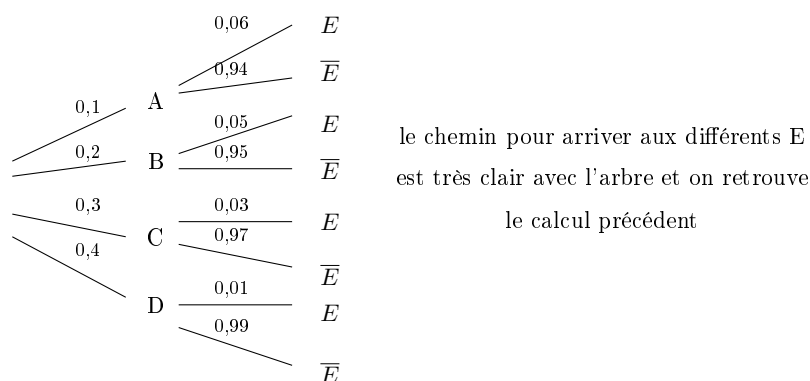
Remarque : très souvent, on utilise le système complet d'événements à 2 éléments $\{B, \overline{B}\}$ pour l'application de la formule.

La formule des probabilités totales est très souvent utilisée pour la résolution d'exercices.

Exemple d'application de la formule des probabilités totales : exercice 5 TD

$p(E) = p_A(E) * p(A) + p_B(E) * p(B) + p_C(E) * p(C) + p_D(E) * p(E)$ d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $\{A, B, C, D\}$ avec Ω ensemble des produits sortis de l'usine.
Ainsi $p(E) = 0,06 * 0,1 + 0,05 * 0,2 + 0,03 * 0,3 + 0,01 * 0,4 = 0,029$.

On peut facilement visualiser la formule des probabilités totales sur un arbre :



3.6 Le théorème de Bayes

Théorème de Bayes : Si $\{B_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements tels que $p(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, soit $A \in \wp(\Omega)$ tel que $p(A) \neq 0$ alors :

$$\forall k \in I, p_A(B_k) = \frac{p_{B_k}(A) * p(B_k)}{\sum_{i \in I} p_{B_i}(A) * p(B_i)}$$

$$\Rightarrow p_A(B_k) = \frac{p(B_k \cap A)}{p(A)}$$

comme $\{B_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements,

$$p(A) = \sum_{i \in I} p(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} p_{B_i}(A) * p(B_i) \text{ (Th proba totales)}$$

de même $p(B_k \cap A) = p_{B_k}(A) * p(B_k)$

$$\text{et ainsi la formule de Bayes : } p_A(B_k) = \frac{p_{B_k}(A) * p(B_k)}{\sum_{i \in I} p_{B_i}(A) * p(B_i)}$$

Interprétation : les événements $(B_i)_{i \in I}$ forment un système complet d'événements, l'un d'eux et seulement un est réalisé à coup sûr lors de l'expérience aléatoire. C'est pourquoi on peut les envisager comme des "causes" de l'expérience aléatoire. A événement qui se produit ultérieurement en est le "résultat". Ainsi $p_A(B_k)$ va à l'encontre chronologiquement parlant de notre expérience aléatoire, la probabilité que ce soit la cause B_k qui se produise sachant que l'effet A a eu lieu. En inversant le "sachant que" on envisage la probabilité que l'événement

A ait lieu sachant que la cause B_k soit réalisée, ce cheminement va dans le sens de notre expérience.

Exemple d'application du théorème de Bayes :

Trois urnes indiscernables contiennent des boules blanches B et noires N selon la répartition ci-dessous :

U_1 : 2 boules N et 5 boules B

U_2 : 3 boules N et 1 boule B

U_3 : 7 boules N et 7 boule B

On tire une boule blanche ; quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_3 ?

On a une illustration de l'interprétation précédente: On cherche ici $p_B(U_3)$, nous remontons clairement le sens de l'expérience chronologique qui nous donne facilement $p_{U_3}(B)$, l'événement B a lieu après le choix de U_3 . B est un effet de l'expérience, les U_i peuvent être ainsi considérés comme des causes. On est ainsi, grâce à la formule de Bayes, en mesure d'inverser le sens de l'expérience en utilisant le système complet d'événements $\{U_1, U_2, U_3\}$ et on a d'après la formule :

$$\begin{aligned} p_B(U_1) &= \frac{p_{U_1}(B) * p(U_1)}{p_{U_1}(B) * p(U_1) + p_{U_2}(B) * p(U_2) + p_{U_3}(B) * p(U_3)} \\ &= \frac{\frac{5}{7} * \frac{1}{3}}{\frac{5}{7} * \frac{1}{3} + \frac{1}{4} * \frac{1}{3} + \frac{7}{14} * \frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{21} * \frac{3 * 28}{(20 + 7 + 14)} = \frac{20}{41} \text{ un peu moins de } 50\% \end{aligned}$$