Chapitre 5 — Optimisation libre

Ne jamais dire : "l'origine est un max global"

p 62 : Preuve par contraposition : (Non B $\Rightarrow$ Non A)

Soit X^* Supposons $f'(X^*) \neq 0$

DL à l'ordre 1 de f en X^*

$X \in U(X^*)$

$$f(X) = f(X^*) + f'(X^*) \times (X - X^*) + \cancel{o(X - X^*)}$$

ce terme est négligeable pour X proche de X^* car $f'(x^*) \neq 0$

$$f(X) - f(X^*) \simeq f'(x^*)(x - X^*)$$

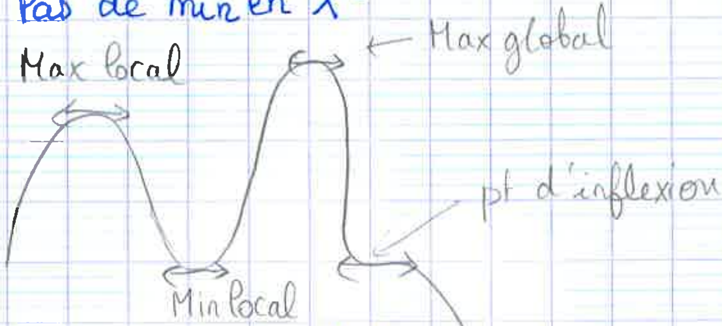
Supposons $f'(X^*) > 0$

Si $X > X^*$ $f(X) - f(X^*) > 0$

Pas de max en X^*

$f(X) - f(X^*) < 0$

Pas de min en X^*



Pas de Min global

5.2.2 DL à l'ordre 2 en X^* de f

$$f(X) = f(X^*) + f'(x^*)(X - X^*) + \frac{1}{2} f''(X^*)(X - X^*)^2 + o((X - X^*)^2)$$

$f'(x^*) = 0$ car X^* pt critique

pk ce terme a disparu ?

$$f(X) - f(X^*) = \frac{1}{2} f''(X^*)(X - X^*)^2 + o((X - X^*))$$

Par contraposition si $f''(x^*) > 0$

sur un voisinage suffisament proche de X^*

$$f(X)-f(X^*) \simeq \frac{1}{2} f''(X^*)(X-X^*)^2 > 0$$
$$f(X) > f(X^*)$$
→ Pas de max local en X^*.

5.2.3.

p63 Exemple : $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$

Pts candidats : $f'(x) = 1 - x = 0$
$x = 1$

CSO $f''(x) = -1$
$f''(1) = -1 < 0$ En $x = 1$ on a un max local qui vaut $f(1) = \frac{3}{2}$

concave →

5.2.4. Preuve : contraposée
⟹ Soit k d'ordre impair
DL à l'ordre k

$$f(X) - f(X^*) \simeq \underbrace{\underset{\neq 0}{f^{(k)}(X^*)} \frac{(X-X^*)^k}{k!}}_{\text{change de signe}}$$

Ni max ni min en X^*

⟸ k d'ordre pair

$$f(X) - f(X^*) \simeq \underbrace{\underset{\neq 0}{f^{(k)}(X^*)} \frac{(X-X^*)^k}{k!}}_{\text{signe constant car k pair}}$$

$-x- = tjs +$ car pair

⟹ en X^* on a un extremum.

$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$$f(X) = f(X^*) + \underset{\text{gradient}}{\nabla f(x^*)} (X_1 - X^*) + o(x_1 - x_1^*) + \dots + o(x_n - x_n^*)$$

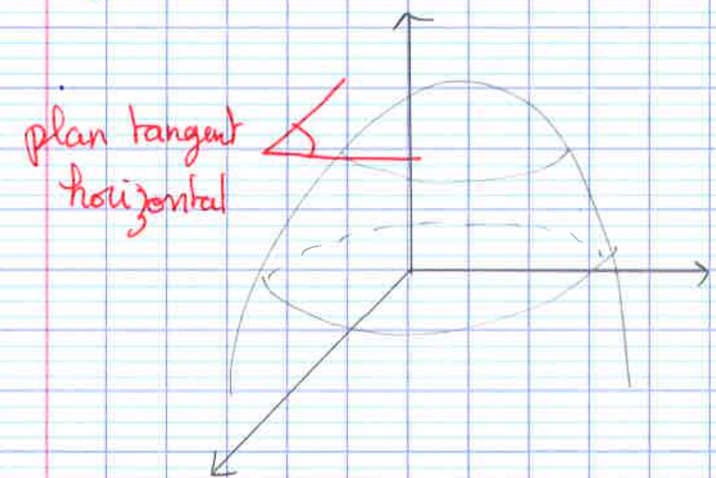
Supposons le gradient non nul $\frac{df}{dx}(X^*) \neq 0$

$$X = X^* + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f(X) \simeq f(X^*) + t \underset{\neq 0}{\frac{\partial f}{\partial x}} (X^*)$

$f(X) - f(X^*)$ change de signe lorsque t change de signe
$\Rightarrow$ Pas d'extremum en X^*

[On aurait pu faire autrement : DL en fixant les x_i
$\Psi(x) = f(x_1, x_2^*, \dots x_n^*)$]



. Par contraposition :
On suppose $d^2 f$ non semi definie négative
donc $\exists\ \lambda_i$ et V_i associé où λ_i vp
Strictement positive.

$$f(X) = f(X^*) + \nabla f_{(X^*)} (X - X^*) + \frac{1}{2} {}^t(X - X^*) D^2 f_{(X^*)} (X - X^*)$$
$$+ o\left(\| X - X \|\right)^2$$

$$f(X) - f(X^*) = \frac{1}{2} {}^t(X - X^*) D^2 f_{(X^*)} (X - X^*)$$
$$+ \text{reste}$$

?

Posons $X = X^* + hV_i \quad X - X^* = hV_i$

$$f(X) - f(X^*) = \frac{1}{2} h\, {}^tV_i\, D^2 f_{(X^*)}\, h V_i + \text{reste}$$
$$= \frac{1}{2} h^2\, {}^tV_i D^2 f V_i + \text{reste} = \frac{1}{2} h^2 \lambda_i \| V_i \|^2 + \underset{o(\|V_i\|^2)}{\underline{\text{reste}}}$$

donc $f(X) - f(X^*)$ est du signe de $\frac{1}{2} h^2 \lambda_i \|V_i\|^2$ et donc > 0
Ce qui implique qu'en X^* il n'y a pas de maximum local
(car direct° montante)
qd Vp > 0 → direct° montantes
< 0 → qui descendent
$= 0$ → on est embêtés → le reste est important.

p 64 5.3.5 Exemple pour connaitre la nature d'un pt candidat :
$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$$

CN1 (condition nécessaire du 1er ordre)

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{df}{dy} = 2y - x = 0 \\ \frac{df}{dz} = 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y)^2 - y \Rightarrow 12y^2 - y = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(12y-1) = 0 \\ x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ①

ou $12y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{12} \\ z = 0 \end{cases}$ ②

On a 2 points candidats : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/12 \\ 0 \end{pmatrix}$

CS2
$$\begin{cases} \frac{d^2f}{d^2x} = 6x \\ \frac{d^2f}{d^2y} = 2 \\ \frac{d^2f}{d^2z} = 2 \\ \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = -1 \\ \frac{d^2f}{dxdz} = \frac{d^2f}{dzdx} = 0 \\ \frac{d^2f}{dydz} = \frac{d^2f}{dzdy} = 0 \end{cases}$$

(matrice hessienne)

$$\Leftrightarrow D^2f = \begin{bmatrix} 6x & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^2f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \times [(\lambda^2 - 2\lambda) - 1]$$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

$\lambda_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \rightarrow < 0$

$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$

$\lambda_3 = 2 > 0$

$\left.\begin{matrix} n_- = 1 \\ n_+ = 2 \end{matrix}\right\}$ D^2f non défini $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = point selle

cas : 2ème point candidat :

$$D^2f\left(\frac{1}{6} ; \frac{1}{12}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$\Delta = 9 - 4 = 5$

$\lambda_1 = \frac{3 - \overset{\approx 2,23}{\sqrt{5}}}{2} > 0 \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0$

Calcul des lim car H Hessienne en 1 pt précis !

$\lambda_3 = 2 > 0$

$\left.\begin{matrix} n_- = 0 \\ n_+ = 3 \end{matrix}\right\}$ $D^2f(1/6 ; 1/12 ; 0)$ défini ⊕ $\Rightarrow$ min LOCAL

?

Min ~~global~~ local ? $= f\left(\frac{1}{6} ; \frac{1}{12} ; 0\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{1}{72} = -\frac{1}{432}$

on pose $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Remarque : $f\left(t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -t^3$

$\lim_{t \to +\infty} f(-t, 0, 0) = -\infty \Rightarrow$ pas de minimum GLOBAL

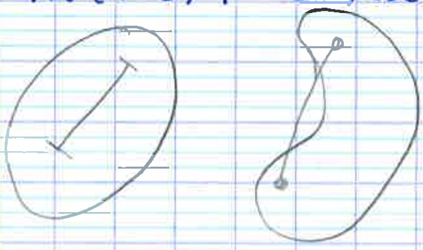
on a choisit $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car D^2f dépend de x et on essaie de voir si ça va + bas que le min qu'on a trouvé $\rightarrow$ voir si c'est un compact ou non

5_4. Fonctions convexes et concaves.

5_4_1 Ensemble convexe

Si $t \in [0,1]$

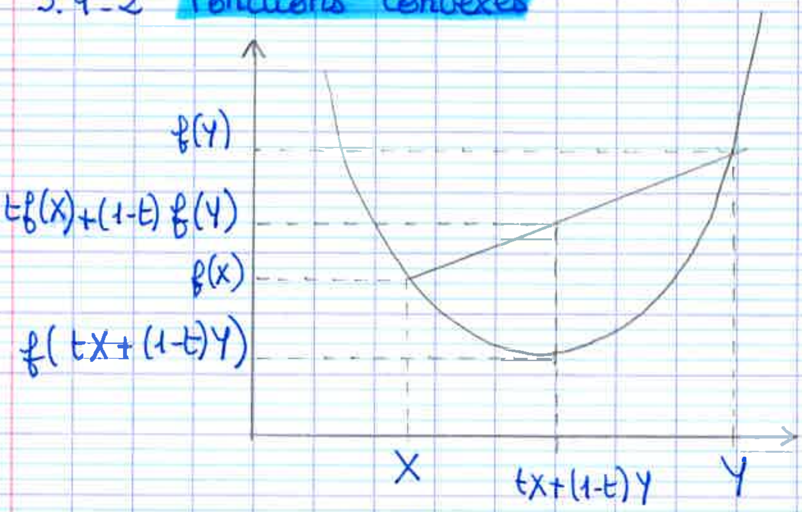
$tX+(1-t)Y \in X$ à Y



convexe   pas convexe ni concave

p 64

5.4_2 Fonctions convexes



⇒ Une fonction f est convexe ssi entre deux points de la courbe, le graph de f est en dessous du segment reliant ces 2 pts.

ex :
$$\left.\begin{array}{l} x^2 \\ e^x \\ \frac{1}{x} \text{ pour } x>0 \end{array}\right\} \text{strictement convexe}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x^2 \\ -e^x \\ \ln x \quad \rightarrow x>0 \\ \sqrt{x} \quad x \geq 0 \end{array}\right\} \text{strictement concave}$$

5.4.4 Propriétés :

5.4.5 Retour sur l'optimisation :

→ Si pt critique → f étant convexe, il y a un min global en ce pt.

⚠ $\cancel{\exists}$ min global pour tous les convexes.

p 65 5.4.6 : Exemples

• $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$CN1 \begin{cases} \frac{df}{dx} = 2x = 0 \\ \frac{df}{dy} = 2y = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pt candidat unique

$$CN2 \begin{cases} \frac{df}{dx} = 2 \\ \frac{df}{dy} = 2 \\ \frac{df}{dxdy} = \frac{df}{dydx} = 0 \end{cases}$$

$$D^2 f = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0 \quad \forall X$

⇒ défini positif ⇒ f strictement convexe

⇒ min local en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= f(0,0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to +\infty} (-t, 0) = +\infty \\ \lim_{t \to -\infty} (-t; 0) = +\infty \\ \lim_{t \to +\infty} (0; -t) = +\infty \\ \lim_{t \to -\infty} (0, -t) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ pas de min global

$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$

CN1 : $\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 4x^3 + 2xy^2 = 0 \\ \dfrac{df}{dy} = 2x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2x^2+y^2) = 0 \quad (1) \\ 2y(x^2+2y^2) = 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow x = 0$ ou $2x^2+y^2 = 0$

a) Supposons $x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\Rightarrow y = 0$ ou $2y^2 + x^2 = 0$

Supposons $y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Supposons $x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Supposons $2x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$

Conclusion : on a un seul pt candidat : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

CN2 : $\begin{cases} \dfrac{d^2f}{d^2x} = 12x^2 + 2y^2 \\ \dfrac{d^2f}{d^2y} = 2x^2 + 12y^2 \\ \dfrac{df}{dxdy} = \dfrac{df}{dydx} = 4yx \end{cases}$ $\quad D^2f = \begin{bmatrix} 12x^2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+12y^2 \end{bmatrix}$

$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + f(0,0)$
$f(x,y) > f(0,0)$ pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
En $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a un min global

Pour déterminer signe des λ :

$\text{dét } D^2f = (12x^2+2y^2)(2x^2+12y^2) - 16x^2y^2$

$= 24x^2 + 24y^2 + 132x^2y^2 \geq 0$ ↳ λ_i du m signe

Trace : $14(x^2+y^2) \geq 0$ donc λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$

f semi déf $(+)$ → convexe en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

min GLOBAL $= f(0,0) = 1$

$f(x,y) = x^4 + y^3 + y^2$

CN1 : $\begin{cases} \frac{df}{dx} = 4x^3 = 0 \\ \frac{df}{dy} = 3y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(2+3y) = 0 \end{cases}$

pts candidats : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

CN2 : $\begin{cases} \frac{d^2f}{d^2x} = 12x^2 \\ \frac{d^2f}{d^2y} = 6y+2 \\ \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{d^2f}{dydx} = 0 \end{cases}$ $D^2f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y+2 \end{bmatrix}$

$D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Autour de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ les valeurs propres $12x^2 \geq 0$
$6y+2 \geq 0$

donc D^2f semi défini ⊕ au voisinage de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f est localement convexe en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

car on a remplacé par (0,0) dans D^2f

On a un minimum local $= f(0,0) = 0$

$D^2f\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Comme $\lambda = -2$ valeur propre ie direction de descente
↓
vp

⇒ pas de min local

⇒ soit max local
soit pt selle

?

ici : pt selle.

En $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ $\quad D^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Les vp au voisinage de $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ sont $\begin{matrix} 12x^2 > 0 \\ 6y+2 < 0 \end{matrix}$ en dehors de $\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ pas de convexité ou concavité locale

Comme en $(0; -2/3)$ l'une des vp est $-2 < 0$

$\Rightarrow$ pas de Min local

$f\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27} > 0$ $\quad \frac{12}{27}$

? $f(h(0,1) + (0, -2/3)) = f(h, -2/3)$

$f(h; -2/3) = h^4 + f(0; -2/3)$ $\quad = h^4 - \frac{4}{3}$

$> f(0; -2/3)$ si $h \neq 0$

? direction de montée donc $(0; -2/3)$ est un point selle.

$f(x,y) = x^4 + y^3 + y^2$

$\lim\limits_{\substack{x=0 \\ y \to -\infty}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x=0 \\ y \to -\infty}} y^3 + y^2 = -\infty$

Pas de min global (Pas de max global car pas de max local)