

TD7 : Loi de probabilité

Exercice 1 : (Extrait sujet juin 2007) Anika a rendez-vous avec Christophe à la sortie de la Sorbonne, vendredi à 12h30, elle ne pourra pas attendre plus de 5 minutes. Christophe a un examen de probabilités à l'autre bout de la ville et arrivera sur les lieux du rendez-vous à tout moment entre 12h25 et 12h40 de manière équiprobable.

- 1) Quelle est la loi de probabilité correspondant à l'heure d'arrivée de Christophe ?
- 2) Quelle est la probabilité que Christophe rencontre Anika ?

Exercice 2 : (Extrait septembre 2003) On a constaté à la bourse de Paris entre septembre 2002 et septembre 2003, 60% des actions ont augmenté de valeur, tandis que 40% sont restées stationnaires ou ont diminuée. Pendant cette période un conseiller a choisi 10 actions pour les mettre dans la rubrique des actions « fortement recommandées ». Pour un non-initié qui considérerait ces 10 actions comme choisies au hasard, le taux de sondage est égal à environ 1%. Accroissement de la valeur des

- 1) Donner en la justifiant la loi du nombre d'actions à la hausse.
En déduire la probabilité des événements suivant :
 - a) Accroissement de la valeur des 10 actions
 - b) Accroissement de la valeur pour au moins 8 actions
 - c) Accroissement de la valeur pour au moins 4 actions

Supposons maintenant que ce même conseiller financier ait choisi 60 actions. Toujours pour un non-initié qui considérerait ces 60 actions choisies au hasard, le taux de sondage étant d'environ 6,5%, calculez les probabilités des événements suivants :

- 2)
 - a) Accroissement de la valeur de toutes les actions
 - b) Accroissement de la valeur pour au moins 80%
 - c) Accroissement de la valeur pour moins de 40%.

Exercice 3 : (Extrait février 2000) : Supposons que la probabilité de naissance d'une fille est de 91% et la probabilité de naissance d'un garçon est de 9%. On décide d'étudier les 50 prochaines naissances. On note X la variable aléatoire correspondant au sexe de l'enfant pour une naissance et on décide de s'intéresser à Y la variable aléatoire correspondant au nombre de garçons.

- 1) Quelle est la loi suivie par X ?
- 2) Quelle est la loi suivie par Y ? Quelle est l'expression de cette loi?
- 3) Par quelle loi peut-on approximer Y ? quelle est l'expression de cette loi?

Supposons que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon soit équiprobable et que l'on décide de s'intéresser au 400 prochaines naissances. On retient cette hypothèse d'équiprobabilité.

- 4) Quelle est la loi suivie par Y ?
- 5) Par quelle loi peut-on approximer Y ?
- 6) Trouver la probabilité pour que parmi ces 400 naissances, il y ait moins de 40% de garçon ?
- 7) Trouver la probabilité pour que, parmi les 400 prochaines naissances il y ait entre 43% ,et 57% de filles
- 8) On décide finalement de s'intéresser au rang de naissance du premier garçon dans les familles de 3 enfants noté Z .
 - a) Quelle(s) valeur(s) peut prendre Z ?

- b) Quelle est la loi de Z ? Donner son expression
- c) Calculer son espérance et sa variance?

Exercice 4 : (extrait sujet juin 2004) : Soit une variable aléatoire X répartie uniformément sur l'intervalle $-1/2 \leq x \leq +3/2$.

- 1) de quel type de loi s'agit-il
Puis calculer
- 2) la densité de probabilité
- 3) la fonction de répartition
- 4) La moyenne m
- 5) l'écart type σ

Exercice 5 : (Extrait sujet 2008) Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, l'entreprise effectue des contrôles, 0,6 % des jouets sont déclarés défectueux. On considère un lot de n jouets contrôlés et parmi ceux-ci, on appelle X_n le nombre de jouets déclarés défectueux.

1/ Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ? (On justifiera avec soin le résultat.) Donner l'expression de cette loi.

2/ Pour $n = 500$:

- Par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable X_n ? (justifier)
- Donner l'expression de cette loi.
- En déduire, pour cette valeur de n , une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets déclarés défectueux.

3/ Pour $n = 10000$:

- Par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable X_n ? (justifier)
- En déduire, pour cette valeur de n , une approximation de la probabilité qu'il y ait entre 50 et 70 jouets déclarés défectueux.

Valeur numérique : $\frac{10.5}{\sqrt{59,64}} \approx 1.36$

Exercice 6 : (Extrait sujet septembre 2007) Une entreprise qui commercialise un nouveau produit estime que ses chances de succès auprès de sa clientèle sont de 80%. On interroge 200 clients de l'entreprise sur leur intention d'achat. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de clients susceptibles d'acheter le produit.

- 1) Quelle est la loi suivie par X . Par quelle loi peut-on l'approximer ?
- 2) Quelle est la probabilité pour que l'on ait :
 - a) moins de 95 acheteurs ?
 - b) Plus de 150 acheteurs ?

Exercice 7 : (Extrait du sujet de juin 1999) : Une société d'assurance comportant 300 000 adhérents constatent, à travers de nombreuses observations, qu'un assuré sur 8, en moyenne est sinistré dans l'année.

On demande à un jeune stagiaire Martin d'effectuer un sondage pour l'année écoulée en prélevant dans le fichier de la société un échantillon de 100 dossiers différents.

- 1) Déterminer le nombre de possibilités d'obtenir un échantillon de taille 100 et la probabilité d'obtenir un échantillon de taille 100.

- 2) Déterminer le nombre d'assurés sinistrés dans la population ? et en déduire le nombre de non sinistrés.

Un échantillon de 100 dossiers est fixé.

- 3) Soit X le nombre d'assurés sinistrés parmi cet échantillon de 100 dossiers
- déterminer la loi de X
 - calculer l'espérance mathématique de X , $E(X)$ et la variance de X , $V(X)$.
- 4) a) Compte tenu de la taille de la population totale et celle de l'échantillon, par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
- b) Quelles sont l'espérance et la variance de cette nouvelle loi?
- 5) Supposons que Martin prélève dans le fichier de la société un échantillon de taille 1000, par quelle nouvelle loi peut-on approcher la loi de X ? (justifier). Calculer la $P(X > 10)$.
- 6) Quelle devrait être la taille n_0 de l'échantillon examiné par Martin pour que celui-ci puisse parier avec un risque d'erreur de 5% que la fréquence des sinistrés sera, sur cet échantillon, comprise entre 0,10 et 0,15. Comparer ce résultat avec celui de l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

Exercice 8: (Extrait du sujet de septembre 2002)

Dans un d'hypermarché le nombre de chaînes hi-fi vendues au cours d'une journée quelconque définit une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre 2. Les ventes sont supposées indépendantes

1°) a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

- la vente journalière est au plus égale à 5
- la vente journalière est au plus égale à 2 ou au moins égale à 6
- la vente journalière est au plus égale à 6 sachant qu'elle est au moins égale à 2.

b) Calculer la probabilité pour que deux jours de suite la vente soit au moins égale à 5.

2°) a) Calculer la probabilité pour que la somme des ventes de deux jours consécutifs soit égale à 2.

b) Quelle type de loi suit cette somme.

c) Quelle est la variance de cette loi? Retrouver alors le résultat obtenu en 2a)

3°) Le directeur du magasin décide pendant une semaine de faire une campagne publicitaire sur les chaînes hi-fi. Il estime que pendant cette semaine la vente journalière suivra toujours une loi de Poisson de paramètre μ , qui sera égal à 3 (augmentation moyenne des ventes de 50%) avec une probabilité de $2/3$ ou bien sera égale à 4 (augmentation moyenne des ventes de 100%) avec une probabilité de $1/3$. Quelle devrait alors être la probabilité que, pendant cette période, la vente journalière soit au moins égale à 5.

4°) Cette campagne publicitaire consiste à offrir, chaque jour, un cadeau à quelques uns des acheteurs désignés par tirage au sort. Un jour donné il a été vendu 2 chaînes Hi-fi de la marque A et 6 chaînes Hi-fi de la marque B. Trois des huit acheteurs seront tirés au sort et recevront un cadeau.

Soit Y la variable aléatoire définie par le nombre des acheteurs du type B qui recevront un cadeau à l'occasion de cette journée

a) De quel type de loi s'agit-il? définir l'expression et la loi de probabilité de cette variable.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de cette loi?