

# Chapitre 5

## Variables aléatoires discrètes

Ce chapitre vous présente les différentes lois discrètes que vous serez amenés à rencontrer.

### 5.1 La loi uniforme discrète

#### 5.1.1 Définition de la loi

Exemple type : une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On en prend une au hasard et on s'intéresse à la variable  $X$  qui a pour valeur le numéro tiré. Ainsi,  $X(\Omega) = [1..n]$  et  $\forall k \in [1..n], p(X = k) = \frac{1}{n}$ . On l'appelle loi uniforme car  $X$  prend toutes les valeurs de  $X(\Omega)$  avec la même probabilité  $\frac{1}{n}$ .

Def : On dit que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi uniforme sur  $[1..n]$  si :  
 $X(\Omega) = [1..n]$

$$\forall k \in [1..n], p(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On notera  $X \hookrightarrow U([1..n])$ .

Savoir reconnaître la loi uniforme à travers un exemple :

Soit le problème suivant :

$n$  étudiants se présentent devant un jury pour un examen. On précise qu'il ne peut y avoir d'étudiants ex-aequo. On s'intéresse à la variable  $X$  qui donne le rang de passage de l'étudiant ayant obtenu la meilleure note.  
 $X(\Omega) = [1..n]$ .

On cherche à calculer pour  $k \in [1..n]$   $p(X = k)$ . On a  $n!$  manières d'ordonner nos  $n$  étudiants. Le nombre de manières favorables à  $X=k$  est de donner la  $k$ ième place au meilleur sans se soucier des  $n-1$  places accordées aux autres soit  $(n-1)!$  possibles.

$$\text{Ainsi, } p(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

On reconnaît ainsi une loi uniforme et nous pouvons écrire  $X \hookrightarrow U([1..n])$ .

### 5.1.2 Espérance et variance

Prop : soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \hookrightarrow U([1..n])$

$$(i) E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$(ii) V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (i) E(X) &= \sum_{k=1}^n k * p(X=k) = \sum_{k=1}^n k * \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} * \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} * \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (ii) E(X^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 * p(X=k) = \sum_{k=1}^n k^2 * \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} * \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant l'égalité de Koëning, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(2 * (2n+1) - 3(n+1))}{12} = \frac{(n+1) * (n-1)}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 5.2 Loi de Bernoulli

### 5.2.1 Définition de la loi

On code par 0 ou 1 la réalisation d'un événement. Par exemple, on tire à pile ou face. Soit  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si pile apparaît et 0 sinon. Soit

$p$  la probabilité d'obtenir pile.  
Alors  $X(\Omega) = \{0; 1\}$  et  $p(X = 1) = p$ .

Def : On dit qu'une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ) si  $X(\Omega) = \{0; 1\}$  et  $p(X = 1) = p$ .  
On notera  $X \hookrightarrow B(1, p)$   
(On rajoute le 1 dans les paramètres pour faire le parallèle avec la loi binomiale qui suit)

### 5.2.2 Espérance et variance

Prop : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une v.a.r. de Bernoulli de paramètre  $(1, p)$  alors

- (i)  $E(X) = p$
- (ii)  $V(X) = pq$  avec  $q=1-p$

$$\Rightarrow (i) \quad E(X) = \sum_{k=0}^1 k * p(X = k) = 0 * p(X = 0) + 1 * p(X = 1) = p$$

$$(ii) \quad E(X^2) = 1^2 * p = p$$

Ainsi d'après Koënik :  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p) = p * q$  ■

## 5.3 Loi Binomiale

### 5.3.1 Définition de la loi

Une urne contient  $b$  boules blanches et  $a$  boules noires (proportion de boules blanches  $p$ ). On effectue  $n$  tirages avec remise et on s'intéresse à la variable  $X$  nombre de boules blanches tirées lors de l'expérience. On a évidemment  $X(\Omega) = [0..n]$

$$\text{Soit } k \in [0..n] \\ p(X = k) = C_n^k * p^k * q^{(n-k)}$$

On notera que  $X$  apparaît comme somme de  $n$  var de Bernoulli  $(1, p)$  indépendantes.

Def : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var. On dit que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  si :

$$(i) \quad X(\Omega) = [0..n]$$

$$(ii) \quad \forall k \in [0..n], p(X = k) = C_n^k * p^k * q^{(n-k)} \text{ avec } q=1-p$$

On note alors  $X \hookrightarrow B(n, p)$

### 5.3.2 Espérance et variance

Prop : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var de loi  $B(n, p)$ , alors :

- (i)  $E(X) = np$
- (ii)  $V(X) = npq = np(1-p)$

$$\Rightarrow (i) \quad E(X) = \sum_{k=0}^n k * p(X = k) = \sum_{k=1}^n k * C_n^k p^k q^{n-k}$$

On a vu dans le chapitre 1 que  $k * C_n^k = n * C_{n-1}^{k-1}$

D'où

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n n * C_{n-1}^{k-1} * p^k * q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np * 1^{n-1} = np \end{aligned}$$

La démonstration de (ii) sera vue dans le développement du cours.

## 5.4 Loi hypergéométrique

### 5.4.1 Définition de la loi

Comme on l'a vu dans le chapitre 4, c'est l'archétype d'une situation de sondage où l'on tire un échantillon sur un grand nombre de pièces.

Exemple : une urne contient  $a$  boules noires et  $b$  blanches. On extrait au hasard une poignée de  $n$  boules ( $a > n$  et  $b > n$ ). Soit  $X$  la variable égale au nombre de boules noires obtenues :

$$X(\Omega) = [0..n] \text{ et } p(X = k) = \frac{C_a^k * C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

Def : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var. On dit que  $X$  suit une loi hypergéométrique de paramètre  $(N, n, p)$  ( $1 \leq n \leq N$  et  $0 < p < 1$ ) si :

- (i)  $X(\Omega) = \{0..n\}$
- (ii)  $\forall k \in X(\Omega), p(X = k) = \frac{C_{Np}^k * C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$

On notera  $X \hookrightarrow H(N, n, p)$

### 5.4.2 Espérance et variance

Prop : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var de loi  $H(N, n, p)$  alors :

- (i)  $E(X) = np$
- (ii)  $V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$  ( $q=1-p$ )

$$\begin{aligned}
(i) \Rightarrow E(X) &= \sum_{k=0}^n k * p(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^n k \frac{C_{Np}^k * C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}
\end{aligned}$$

Comme pour la binomiale, on réutilise le fait que  $k * C_k^n = n * C_{(n-1)}^{(k-1)}$

$$\begin{aligned}
Ainsi \ E(X) &= \sum_{k=1}^n Np \frac{C_{N(p-1)}^{k-1} * C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \frac{Np}{C_N^n} \sum_{k=1}^n C_{N(p-1)}^{k-1} * C_{Nq}^{n-k} \\
&= \frac{Np}{C_N^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_{N(p-1)}^k * C_{Nq}^{n-k-1}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Vandermonde vue au chapitre 1,

$$\sum_{k=0}^n C_a^k * C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$$

$$\begin{aligned}
Ainsi E(X) &= \frac{Np}{C_N^n} * C_{N(p-1)+Nq}^{n-1} = \frac{Np C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} \\
&= Np \frac{(N-1)!}{(N-1-n+1)!(n-1)!} * \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= Np \frac{n}{N} = np \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(ii) la démonstration pour la variance sera faite en cours.

## 5.5 Loi géométrique

### 5.5.1 Définition de la loi

Exemple : on lance une pièce de monnaie, on suppose que la probabilité d'obtenir pile est égale à  $p$  ( $0 < p < 1$ ).

Soit  $X$  la var égale au rang d'apparition du premier pile.

Alors  $X(\Omega) = [1.. + \infty[$

$X=k$  représente l'événement on obtient  $k-1$  fois face et on obtient pile au  $k$ ème lancer soit

$$p(X = k) = q^{k-1} * p \quad (q=1-p)$$

Def : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var. On dit que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$  si :

$$(i) X(\Omega) = [1; +\infty[$$

$$(ii) \forall k \in [1; +\infty[, p(X = k) = pq^{k-1}$$

Notation :  $X \hookrightarrow G(p)$

### Espérance et variance

Prop : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

Alors : (i)  $E(X)$  existe et  $E(X) = \frac{1}{p}$

(ii)  $V(X)$  existe et  $V(X) = \frac{q}{p^2}$  ( $q=1-p$ )

$\Rightarrow$  (i)  $E(X)$  existe si la série  $\sum_{k \geq 1} k * p(X = k)$  converge or

$k * p(X = k) = kq^{k-1}p = p(kq^{k-1})$  la série  $\sum kq^{k-1}$ , dérivée de la série  $\sum q^k$  ( $0 < q < 1$ ) converge et on a :

$$\sum_{k \geq 1} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Ainsi  $E(X)$  existe et  $E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow$  (ii) nous admettrons sans démonstration le résultat pour la variance.

## 5.6 Loi de Poisson

### 5.6.1 Définition de la loi

Contrairement aux lois précédentes, la loi de Poisson ne correspond pas à une situation type. Elle apparaît comme un modèle décrivant certaines observations statistiques.

C'est une variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs entières de  $[0..n..]$  avec :

$$p(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \text{ où } \lambda \text{ est positif.}$$

Elle n'a de sens que lorsque  $\lambda$  n'est pas trop grand. En général, on se limite à  $0 \leq \lambda \leq 18$ .

Quand, par exemple, on parle de moyenne annuelle pour les accidents à un carrefour donné dans Paris, si cette moyenne est  $\lambda$ , on peut dire que le nombre d'accidents annuels à ce carrefour suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . La loi géométrique a été définie de manière rigoureuse (temps d'attente avant un succès), la loi de Poisson est, quant à elle, une loi qui approche certains phénomènes, on ne la rencontre pas de manière rigoureuse dans les différentes expériences qu'on pourra mener.

Def : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var.

On dit que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si :

(i)  $X(\Omega) = [0.. + \infty[ = \mathbb{N}$

(ii)  $\forall k \in \mathbb{N}, p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Notation :  $X \hookrightarrow P(\lambda)$

### 5.6.2 Espérance et variance

Prop : Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une var. On suppose que  $X \hookrightarrow P(\lambda)$  alors :

(i)  $E(X)$  existe et  $E(X) = \lambda$

(ii)  $V(X)$  existe et  $V(X) = \lambda$

$\Rightarrow$  (i)  $E(X)$  existe si la série  $\sum_{k \geq 1} |k * p(X = k)|$  converge

$$\text{soit } \sum_{k \geq 1} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\text{Or } \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}$$

Ainsi  $E(X) = \lambda$  ■

$\Rightarrow$  (ii) la démonstration sera vue en cours.